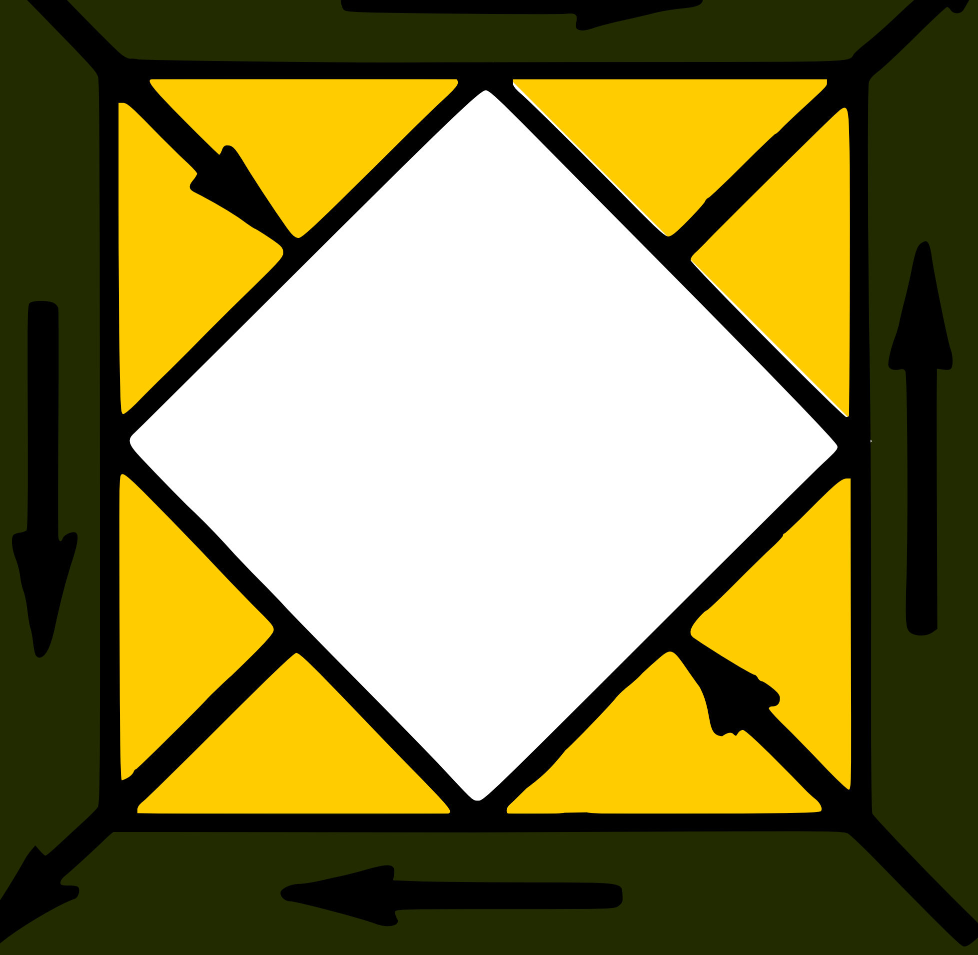
P. Stepine

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX



Éditions Mir Moscou

П. А. СТЕПИН

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО « НАУКА »
МОСКВА

P. STEPINE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX



ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par VALENTIN POLONSKI

На французском языке

© Издательство « Высшая школа», 1983, с изменениями
© traduction française, Editions Mir, 1986

PRÉFACE

Les cours de nombreuses Ecoles supérieures, y compris des Instituts des Mines, de Métallurgie, d'Economie technique, de Technologie chimique, des Constructions électriques, etc., prévoient la présentation de la résistance des matériaux suivant un programme abrégé professé en 80 ou 120 heures.

Un tel programme impose l'existence d'un manuel sommaire rendant compte des connaissances essentielles relatives à la discipline traitée.

Le présent ouvrage rédigé en se guidant par ces impératifs a pour objectif de combler la lacune due à l'absence des livres de ce genre.

Les questions principales sont illustrées par des exemples qui, toutefois, ne sont ni nombreux ni compliqués. L'auteur tient compte du fait que les étudiants, tout en assimilant la théorie, poursuivent des études pratiques, où ils acquièrent la maîtrise de résolution des problèmes plus compliqués et font des devoirs en utilisant des ouvrages correspondants.

Le manuel donne la description d'une méthode nouvelle très efficace et simple de la détermination des déplacements en flexion.

Les unités utilisées dans le manuel correspondent au Système International (SI) et la symbolisation est conforme à la norme CT 1565-79 de CEE.

L'auteur exprime sa reconnaissance aux enseignants de la chaire de Résistance des matériaux de l'Institut d'Aviation S. Ordjonikidzé de Moscou, et notamment, au professeur

I.Trapézine, au candidat ès sciences techniques V. Karavanov, au chargé de cours par intérim M. Mikhaïlov, pour leurs suggestions utiles.

Il exprime également à l'avance sa reconnaissance à tous ceux des lecteurs qui voudraient bien lui présenter leurs suggestions et propositions qu'il prie d'adresser aux Editions «Vyschaïa Chkola».

L'auteur

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

§ 1. Objet de la Résistance des matériaux

Les divers ouvrages et machines dont la conception et la construction sont assumées par un ingénieur dans son activité pratique doivent posséder nécessairement, en plus de bien d'autres propriétés et qualités, celle de la *résistance,* c'est-à-dire la *propriété de résister à la destruction sous l'action des forces (charges) extérieures*. Pour ce faire les éléments (pièces) des ouvrages et machines doivent se fabriquer en matériaux correspondants de dimensions convenables.

La première tâche qui incombe donc à un cours de Résistance des matériaux est de présenter un exposé suivi des méthodes de calcul à la résistance des éléments des constructions.

Outre cela, dans de nombreux cas il s'agit de déterminer les variations de la forme et des dimensions (*déformations*) des éléments sous l'action des charges.

Il en est ainsi du fait qu'en réalité il n'existe pas dans la nature des corps parfaitement solides, indéformables, qu'étudie la mécanique rationnelle. Il est vrai que les déformations dues en service aux charges courantes sont peu grandes et ne peuvent être détectées qu'à l'aide des appareils spéciaux (extensomètres).

De faibles déformations n'influent pas d'une façon importante sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps, ce qui fait que la mécanique rationnelle ne les envisage pas. Pourtant, sans l'étude de ces déformations il est impossible de résoudre le problème très important pour la pratique des conditions susceptibles d'amener la rupture de la pièce ou, à l'inverse, des conditions susceptibles d'assurer le service d'une pièce sans aléas.

D'autre part, dans de nombreux cas la grandeur des déformations doit être limitée si petites soient-elles par rapport à la pièce elle-même, car s'il n'en est pas ainsi, le fonctionnement normal de la construction peut devenir impossible. Par exemple, la déformation d'une pièce usinée et des éléments d'une machine-outil peuvent altérer la précision d'usinage, ce qui est inadmissible.

La propriété d'un élément de construction de résister à la déformation s'appelle *rigidité*.

Ceci détermine la deuxième tâche du cours: exposer les méthodes de calcul des éléments des constructions à la rigidité.

Sa tâche suivante est liée à l'étude de la stabilité des formes d'équilibre des corps réels, c'est-à-dire subissant la déformation.

Par *stabilité* on entend *la propriété de l'élément de résister sous de faibles actions perturbatrices à la manifestation des écarts importants de l'équilibre non perturbé.*

Par action perturbatrice on peut évidemment entendre une faible variation de la charge.

Donc, le concept de stabilité peut être énoncé aussi de la façon suivante.

L'équilibre d'un élément est *stable* si à un faible changement de charge correspond un faible changement de déformation.

Au contraire, l'équilibre est *instable* si une variation limitée de la charge entraîne une poussée très grande des déformations.

La *perte de stabilité* se traduit également par la *brusque succession d'une forme d'équilibre à une autre*.

A titre d'exemple citons le cas de la compression d'un élément mince par une force appliquée le long de son axe. Jusqu'à une certaine valeur (critique) de la force comprimante fonction du matériau, des dimensions et des conditions de fixation de l'élément, il conserve la forme rectiligne. Lorsque la force atteint la valeur critique, il devient possible que l'élément adopte en plus de la forme rectiligne d'équilibre, une forme incurvée, plus dangereuse.

La perte de stabilité peut survenir sous des valeurs des charges ne présentant aucun danger du point de vue de la résistance ou de la rigidité.

L'exposé des méthodes de calcul des éléments des constructions *à la stabilité* constitue la troisième tâche du cours.

En appliquant les méthodes mentionnées il faut s'efforcer d'assurer une *économie* maximale *des matériaux,* c'est-à-dire de retenir des dimensions suffisantes non excessives des pièces des machines et des constructions. Il est clair qu'à cet effet il faut que l'étude des propriétés des matériaux utilisés et de l'allure des charges appliquées soit la plus poussée possible. Ceci s'obtient par une exploration expérimentale sous tous les aspects et une étude minutieuse de l'expérience acquise dans la conception et le service des constructions.

Par ailleurs, pour déduire les relations de calcul principales il faut introduire des hypothèses et des restrictions simplificatrices de toute sorte. Leur validité, ainsi que la valeur de l'erreur qu'elles apportent dans les formules de calcul sont vérifiées en comparant les résultats obtenus à l'aide des formules avec les données empiriques.

Les constructions qu'un ingénieur affronte généralement dans sa pratique ont d'habitude une forme complexe dont les éléments isolés peuvent être ramenés aux types les plus simples:

1. *BARRE,* corps dont deux dimensions sont petites par rapport à la troisième (fig. I.1, *a*). Dans un cas particulier une barre peut avoir une section droite à aire constante et axe rectiligne. Une barre à axe rectiligne s'appelle souvent *tige*. L'*axe d'une barre* c'est la ligne qui réunit les centres de gravité de ses sections droites.

La *section droite* est la figure plane dont le centre de gravité repose sur l'axe et qui est normale à cet axe.

2. *PLAQUE,* corps délimité par deux surfaces planes séparées par une distance petite devant les autres dimensions (fig. I.1, *b*).

3. *COQUE,* corps délimité par deux surfaces curvilignes séparées par une distance petite devant les autres dimensions (fig. I.1, *c*).

4. *BLOC,* corps dont toutes les trois dimensions sont de même ordre.

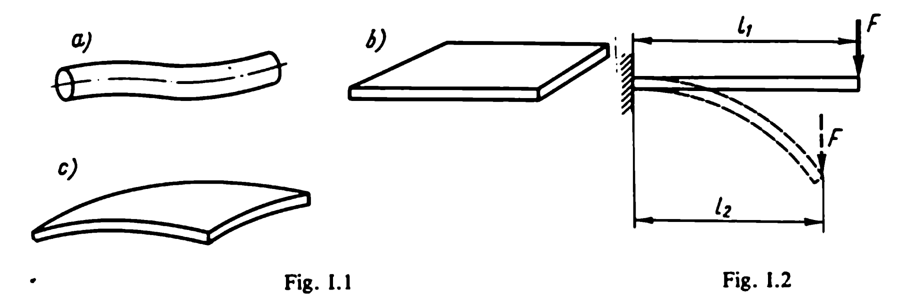


Fig. I.1

Fig. I.2

Le cours de Résistance des matériaux a surtout pour objet l'étude des corps à la forme de barres de section constante et des structures les plus simples qu'elles forment. A cet effet, on envisage les barres à rigidité suffisante, c'est-à-dire ne subissant pas sous charge de déformations importantes.

Pour ce qui est des barres très flexibles (fig. I.2), elles sont le siège des déformations si fortes, qu'il est impossible de ne pas en tenir compte même dans le calcul des réactions d'appui. Quant au calcul de la nouvelle distance l_2, sensiblement différente de la distance l_1, c'est une tâche plutôt compliquée.

Les méthodes de calcul des barres flexibles, des plaques, des coques et des blocs sont décrites dans le cours de la Théorie appliquée de l'élasticité, affranchi des hypothèses simplificatrices introduites par le cours de Résistance des matériaux. Les méthodes de la théorie de l'élasticité permettent d'obtenir aussi bien des solutions exactes des problèmes envisagés par la Résistance des matériaux, que celles des problèmes plus complexes qui ne se prêtent pas à l'application des hypothèses simplificatrices.

Les méthodes de calcul des structures à tiges (treillis) font l'objet du cours de la Théorie des structures qui porte également le nom de Mécanique des constructions.

L'essor des connaissances sur la résistance des matériaux, tout comme celui des disciplines connexes, est indissolublement lié au développement de la technique.

L'apparition de la Résistance des matériaux en tant que branche scientifique date du XVIIe siècle et est associée au nom de Galilée. Un apport important dans ce domaine, ainsi qu'à la théorie de l'élasticité, a été fait par des savants aussi éminents que Hooke, Bernoulli, Saint-Venant, Cauchy, Lamé, d'autres encore, qui ont énoncé les hypothèses fondamentales et ont donné certaines équations de calcul.

Il convient de signaler particulièrement les recherches d'Euler, grand savant du XVIIIe siècle, membre de l'Académie des Sciences de Pétersbourg. Son ouvrage consacré au calcul à la stabilité des barres comprimées est largement utilisé de nos jours encore.

Les travaux des savants russes D. Jouravski, C. Golovine, etc. ont acquis au XIXe siècle une renommée mondiale. La formule de Jouravski des constantes tangentielles en flexion est appliquée jusqu'à nos jours.

Vers la fin du XIXe siècle F. Yassinski a réalisé les calculs à la stabilité des barres comprimées qui aujourd'hui encore présentent de l'intérêt.

Dès le début du XXe siècle le rôle des savants russes dans la théorie de la résistance des matériaux ne cesse de croître. On voit apparaître les ouvrages remarquables du professeur I. Boubnov, de A. Krylov, de l'Académie des Sciences, d'autres encore, consacrés au développement et au perfectionnement des méthodes de calcul. La méthode de Boubnov relative à la résolution des problèmes complexes jouit d'une reconnaissance universelle.

L'apport de S. Timochenko, auteur des manuels de la plus haute classe et de nombreux ouvrages scientifiques sur le calcul des constructions à la résistance, à la stabilité et aux oscillations, à la théorie de la Résistance des matériaux, a été très grand.

En U.R.S.S. il existe un grand réseau de centres de recherches chargés d'étudier les méthodes du calcul des constructions. De nouvelles méthodes efficaces de calcul des pièces de forme complexe sollicitées par des charges les plus variées y sont élaborées par leurs chercheurs et concepteurs en collaboration avec les spécialistes des écoles supérieures.

Il convient de mentionner ici les ouvrages de l'académicien N. Davidenkov sur les théories de la résistance, de l'académicien S. Sérensen consacrés à l'étude de la résistance des pièces sollicitées par des charges variables, de l'académicien A. Dinnik, sur la stabilité, etc.

Il faut noter spécialement les travaux du professeur V. Vlassov sur le calcul des tiges à parois minces et des enveloppes largement appliqués dans les techniques modernes.

Des recherches importantes sont dues également à Y. Rabotnov, A. Iliouchine, E. Grigoliuk, V. Bolotine, A. Smirnov, V. Féodossiev, N. Bezoukhov, A. Rjanitsyne, S. Ponomarev, I. Trapézine et à d'autres savants soviétiques.

§ 2. Hypothèses adoptées par le cours de Résistance des matériaux

Les problèmes de calcul des éléments des constructions étant très compliqués, en résistance des matériaux on adopte certaines hypothèses sur les propriétés des matériaux, les charges et l'interaction entre les contraintes et la pièce.

La vérification expérimentale des relations de calcul établies dans ce qui suit à partir de ces hypothèses, a montré qui l'erreur qu'elles apportent est négligeable et dans la pratique on peut ne pas en tenir compte.

1re HYPOTHÈSE. *La matière d'un corps est de structure continue.* Ceci fait qu'on ne prend pas en compte la structure discrète, atomistique, de la matière. Cette hypothèse est parfaitement justifiée du point de vue pratique, la structure de la plupart des matériaux de construction étant à grains si fins qu'on peut admettre sans grande erreur qu'elle est continue. Même pour les matériaux tels que le bois, le béton et les pierres, les calculs fondés sur l'hypothèse de la continuité de la structure donnent des résultats pratiquement satisfaisants.

Ceci s'explique par les dimensions des pièces réelles, qui sont de nombreuses fois plus grandes que les distances interatomiques.

Dans ce qui suit cette hypothèse rend possible l'utilisation du formalisme mathématique des fonctions continues.

2e HYPOTHÈSE. *Le matériau de la pièce est homogène, c'est-à-dire qu'il possède en tous ses points les mêmes propriétés.* L'homogénéité des métaux est très élevée, c'est-à-dire qu'en tous les points de la pièce leurs propriétés sont pratiquement les mêmes. Le bois, le béton, les pierres, les matières plastiques à charge sont moins homogènes. Par exemple, le béton contient comme charge de petites pierres, du gravier, du gravillon, dont les propriétés diffèrent de celles du ciment. Le bois possède des nœuds dont les propriétés se distinguent sensiblement des propriétés de l'autre masse du bois. Dans les matières plastiques les propriétés de la résine sont tout autres que celles de la charge.

Pour autant, comme le montre l'expérience, les calculs fondés sur l'hypothèse de l'homogénéité du matériau fournissent pour les matériaux de construction principaux des résultats satisfaisants.

3e HYPOTHÈSE. *Le matériau de la pièce est isotrope, c'est-à-dire qu'il possède les mêmes propriétés dans toutes les directions.*

D'après les recherches, les cristaux constitutifs de nombreux matériaux possèdent dans de différentes directions des propriétés très différentes. Par exemple, pour le cuivre la résistance des cristaux suivant la direction varie de plus de trois fois.

Cependant, pour les matériaux à grains fins le nombre énorme de cristaux désordonnés fait que dans les différentes directions les propriétés s'égalisent et on peut admettre que ces matériaux sont pratiquement *isotropes*.

Pour les matériaux tels que le bois, le béton armé, les matières plastiques, la justification de ces hypothèses n'est qu'approximative.

Les matériaux dont les propriétés sont différentes dans les diverses directions sont dits *anisotropes*.

4e HYPOTHÈSE. *Avant l'application de la charge les forces intérieures* (initiales) *n'interviennent pas dans le corps*. La résistance à la modification de la forme et des dimensions du corps sous charge est assurée par les forces d'interaction entre les particules du matériau, appelées *forces élastiques*. Par la suite, en parlant des forces intérieures nous entendrons précisément ces forces élastiques sans tenir compte des forces moléculaires en interaction dans un corps non sollicité par une charge.

Aucun matériau ne respecte pleinement cette hypothèse. Les pièces en acier sont sollicitées par des forces intérieures engendrées par le refroidissement irrégulier, le bois, par le séchage irrégulier, le béton, par le processus de solidification.

Dans les cas courants, ces forces sont inconnues de l'agent d'étude. Lorsqu'on peut admettre qu'elles sont importantes, il convient de les déterminer par voie expérimentale.

Il faut noter que les forces qui interviennent dans les constructions et leurs éléments sont jusqu'à présent étudiées d'une façon insuffisante.

5e HYPOTHÈSE OU PRINCIPE DE L'INDÉPENDANCE DE L'EFFET DES FORCES. *Le résultat de l'action sur un corps d'un système de forces est égal à la somme des résultats de l'action de ces mêmes forces appliquées au corps successivement dans un ordre quelconque*. Par «résultat de l'action» il convient d'entendre, suivant le problème concret, les déformations, les forces intérieures engendrées dans le corps et le déplacement des points isolés.

Il faut retenir que l'action des forces isolées d'un système doit être examinée avec les réactions des liaisons qui leur correspondent.

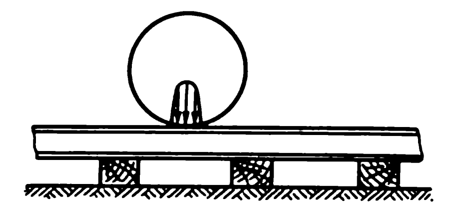


Fig. 1.3

Le principe de l'indépendance de l'effet des forces largement appliqué en mécanique rationnelle aux corps parfaitement solides n'est utilisable dans le cas des corps déformables que sous les deux conditions suivantes :

1. Les déplacements des points d'application des forces sont petits par rapport aux dimensions du corps.

2. Les déplacements qui résultent de la déformation du corps dépendent linéairement des forces appliquées. De tels corps (systèmes) s'appellent corps *linéairement déformables* ou *vérifiant la loi de Hooke.*

Dans les constructions ordinaires ces deux conditions sont respectées, et c'est pourquoi dans le calcul des forces appliquées aux constructions on recourt largement au principe de l'indépendance de l'effet des forces.

6e HYPOTHÈSE OU PRINCIPE DE SAINT-VENANT. *Aux points du corps assez éloignés du point d'application des charges les forces intérieures ne dépendent que faiblement du mode concret d'application de ces charges.*

Dans de nombreux cas ce principe permet de remplacer un système de forces par un autre système statiquement équivalent, ce qui permet de simplifier sensiblement le calcul.

Par exemple, pour le calcul d'un rail (fig. I.3) envisagé comme une poutre reposant sur plusieurs appuis (traverses), la charge réelle de la roue, répartie sur l'aire de contact suivant une certaine loi plutôt difficile à établir, peut être remplacée par un effort concentré (résultant).

Dans ce qui suit, dans des textes correspondants, nous énoncerons certaines autres suppositions et hypothèses.

§ 3. Forces extérieures (charges)

Les charges appliquées à un ouvrage ou à ses éléments sont des forces ou des couples (moments) des forces qui peuvent être envisagés comme *concentrés* ou *répartis.*

Il est vrai que dans la nature il n'existe pas de forces concentrées. Toutes les forces réelles sont réparties suivant une surface ou un volume. Par exemple, la pression d'une roue sur un rail est transmise pratiquement par l'aire produite par la déformation du rail et de la roue (cf. fig. I.3). Pourtant, pour déterminer les forces intérieures qui sollicitent le rail et la roue à une certaine distance de l'aire de transfert de la pression, on peut sur la base du principe de Saint-Venant, remplacer la charge répartie par une résultante concentrée, ce qui simplifie le calcul.

Les charges concentrées sont exprimées en newtons (N), kilonewtons (kN) ou méganewtons (MN).

Les charges réparties peuvent être *superficielles* (par exemple, pression du vent ou de l'eau sur une paroi) et *volumiques* (par exemple, pesanteur, inertie).

Les dimensions de la section droite d'une barre étant petites par rapport à la longueur, sa pesanteur est ordinairement envisagée non pas comme une charge volumique, mais comme une charge répartie suivant la longueur.

Les charges réparties sont exprimées par le rapport entre les unités de force et l'unité de longueur, de surface ou encore de volume. Les charges aussi bien concentrées que réparties peuvent être soit statiques, soit dynamiques.

On appelle *statiques* les charges dont la valeur ou le point d'application, ou encore la direction, changent très lentement, de sorte que l'accélération qui en résulte peut être négligée. Les oscillations des ouvrages ou de leurs parties sollicitées par de telles charges sont négligeables.

On dit *dynamiques* pour les charges qui varient dans le temps à une grande vitesse (par exemple, les charges de choc). Dans divers ouvrages leur action provoque des oscillations. Or, d'après la deuxième loi de Newton celles-ci, par suite de la variation de la vitesse des masses oscillantes, font apparaître des forces d'inertie proportionnelles à ces masses et aux accélérations. Ces forces d'inertie peuvent dépasser de nombreuses fois les mêmes charges appliquées statiquement.

Les lois de la variation des charges dans le temps peuvent avoir un caractère très compliqué.

Dans un cas particulier la variation de la charge F peut être périodique, de sorte que ses valeurs maximales reviennent dans les mêmes intervalles de temps t. Les charges de ce type sont dites *répétitives à régime stable* ou *intermittentes* (fig. I.4). Le calcul à la résistance de l'effet de telles charges est examiné au chapitre XII.

Toutefois, nombreux sont les cas où la variation de la charge dans le temps n'est pas d'un caractère stable (fig. I.5). Il en est ainsi, par exemple, pour les pièces constitutives des automobiles, des tracteurs, des machines-outils, ainsi que de divers ouvrages (immeubles, pylones, etc.) qui subissent la pression du vent, de la neige, etc. Ces charges sont dites *répétitives à régime instable*.

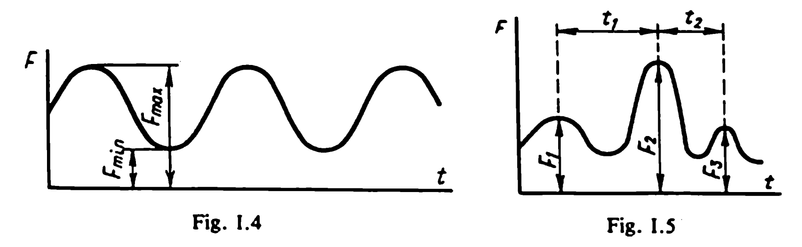


Fig. I.4 Fig. I.5

Leur étude plus poussée n'est possible qu'en appliquant la méthode de la statistique et de la théorie des probabilités aux grandeurs aléatoires.

A titre d'exemple, considérons le calcul de la charge exercée par le vent sur les grues à tour, les ponts, les immeubles et d'autres ouvrages.

On sait qu'au même site géographique la vitesse du vent qui détermine la charge qu'il exerce, est incessamment variable. D'après les observations de longue durée, dans la région de Moscou, par exemple, sa vitesse changeait dans de larges limites (fig. I.6). Le plus souvent (dans 33% des cas) elle était de 3,5 m/s. Parfois elle atteignait 12 m/s (dans 2% des cas) et plus. Mais il arrivait aussi que le vent ne soufflait presque pas ou pas du tout, fait d'ailleurs très rare.

Les courbes du type considéré s'appellent *courbes de distribution*. Elles donnent une idée suggestive de la variabilité de la grandeur envisagée.

Quelle est donc la vitesse du vent qu'il faut retenir pour le calcul ? On est tenté d'abord de prendre sa plus grande valeur enregistrée. Or, premièrement, rien n'assure que pendant le service l'ouvrage ne subira pas l'action d'un vent plus fort que celui enregistré précédemment. Deuxièmement, il est clair que pour le calcul d'un ouvrage à petit délai de service (en

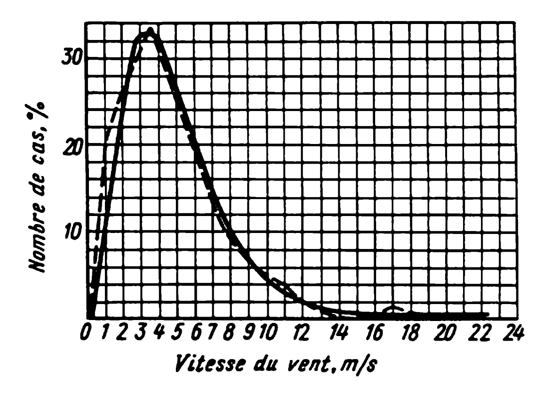


Fig. 1.6

bois, par exemple) il n'est pas raisonnable de se guider par la vitesse du vent qui s'observe une fois tous les 100 ou 200 ans. Par conséquent, la valeur de la charge doit être choisie en fonction du délai de service de l'ouvrage et de son importance.

Ce qui vient d'être dit à propos de la charge exercée par le vent se rapporte dans la même mesure à la plupart de toutes les autres sollicitations.

Pour le calcul des ouvrages les valeurs des charges sont réglementées par les cahiers des charges et les normes prévues pour leur conception.

En construction mécanique les charges de calcul sont déterminées en fonction des conditions concrètes du service de la machine: valeurs nominales de la puissance, vitesse angulaire de certaines de ses pièces, pesanteur, forces d'inertie, etc. Par exemple, en calculant les pièces d'un camion de trois tonnes on tient compte de la charge utile nominale égale à 3 tonnes. Quant aux surcharges éventuelles de la voiture, elles sont prises en compte en retenant pour les sections droites des pièces des dimensions assurant une marge de sécurité. Cette marge sera étudiée de plus près au § 11.

§ 4. Déformations et déplacements

Comme nous l'avons déjà dit, sous l'action des forces extérieures appliquées tous les corps se déforment dans telle ou telle mesure, c'est-à-dire qu'ils changent leur dimension ou leur forme, ou encore les unes et les

autres simultanément. Le changement des dimensions linéaires des corps ou de leurs parties s'appelle *déformation linéaire,* dite *angulaire* lorsque ce sont les dimensions angulaires qui changent. Lorsque la longueur du corps augmente, on dit *allongement,* et lorsqu'elle diminue, on dit *raccourcissement.*

Si le corps est déformé suivant le volume, on dit que le corps se déforme *en un point donné* dans la direction donnée.

Si à la surface du corps, au voisinage du point envisagé, on trace un très petit parallélogramme *1 2 3 4* (fig. I.7, *a*), la déformation fera ce parallélogramme prendre dans le cas général la forme *1' 2' 3' 4'* (fig. I.7, *b*). Les longueurs de ses côtés changeront (augmenteront ou diminueront), alors que les côtés eux-mêmes tourneront par rapport à leur position initiale.

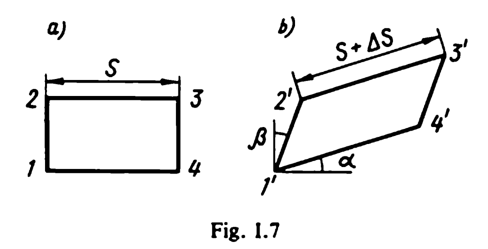


Fig. I.7

Si par exemple, la longueur du côté *2 3* change de Δl, le rapport

$$\varepsilon_{moy} = \Delta s/s$$

s'appelle *déformation linéaire moyenne* (dans notre cas, allongement moyen) au point *2*.

Lorsque le segment s diminue, on obtient à la limite

$$\lim_{s \to 0} \Delta s/s = \varepsilon,$$

où ε est la *déformation linéaire réelle* au point *2* dans la direction *2 3*.

Le changement de l'angle droit initial entre les côtés du parallélogramme envisagé $\gamma = \alpha + \beta$ définira la déformation angulaire (ou l'angle de cisaillement) au point donné.

L'expérience montre qu'après la suppression de la charge les déformations aussi bien linéaires qu'angulaires peuvent disparaître ou ne disparaître que partiellement (en fonction du matériau et de la valeur de la charge). Les déformations qui disparaissent après la décharge sont dites *élastiques* et la propriété du corps de reprendre après la décharge sa forme initiale s'appelle *élasticité.*

Quant aux déformations que le corps conserve même après la suppression de la charge, elles sont dites *résiduelles* ou *plastiques*, et la propriété des matériaux de conserver ces déformations résiduelles s'appelle *plasticité.*

En connaissant les déformations d'un corps en tous ses points et les conditions de sa fixation, on peut déterminer les *déplacements* de tous ses points, c'est-à-dire indiquer leur position (les nouvelles coordonnées) après la déformation. Pour assurer le service normal d'un ouvrage, les déformations de ses éléments doivent être, généralement, élastiques, et les déplacements qu'elles provoquent ne doivent pas dépasser les valeurs admissibles déterminées. Ces conditions exprimées sous forme de telles ou telles équations s'appellent *conditions de rigidité*. Dans certains cas on admet de petites déformations plastiques (pour les constructions en béton armé, en matières plastiques, pour les constructions en métal soumises à l'action des températures élevées).

§ 5. Méthode des sections

Les forces intérieures (forces élastiques) qui interviennent dans un corps sous l'action de la charge sont des *forces à distribution continue* (en vertu de l'hypothèse adoptée sur la continuité du matériau du corps). Nous montrerons plus loin comment ces forces sont déterminées pour un point quelconque d'un corps. Pour le moment nous déterminerons les efforts résultants (y compris les moments) auxquels se ramènent dans la section ces forces élastiques. Ces efforts résultants ne sont rien d'autre que les composantes du vecteur principal et du moment principal des forces intérieures.

Pour calculer les efforts intérieurs (ou les facteurs de force intérieurs) on applique la *méthode des sections* suivante. Un corps en équilibre est coupé en pensée par exemple suivant *a—a* (fig. I.8). L'une des parties est ensuite rejetée, d'habitude celle où les forces appliquées sont plus nombreuses. L'interaction des parties est remplacée par les efforts intérieurs qui équilibrent les forces extérieures appliquées à la partie découpée. Si les forces extérieures reposent dans un plan, pour les équilibrer il faut dans le cas

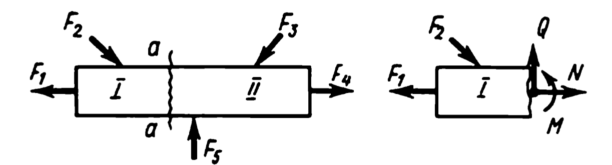


Fig. I.8

général appliquer à la section trois efforts intérieurs: la force N dirigée suivant l'axe de la barre qui s'appelle *effort normal ;* la force Q, qui agit dans le plan de la section droite, appelée *effort tranchant,* et le moment M dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section. Ce moment est produit par la flexion de la barre et s'appelle *moment fléchissant.*

Ensuite on compose les équations d'équilibre de la partie sectionnée du corps, d'après lesquelles on calcule N, Q et M. En effet, en projetant les

forces appliquées à la partie sectionnée sur la direction de l'axe de la barre et en annulant la somme des projections, on trouve N ; en projetant les forces sur la direction perpendiculaire à l'axe de la barre, on calcule Q ; et en annulant la somme des moments par rapport à un point quelconque, on calcule M.

Mais si les forces extérieures (auxquelles on rapporte également les réactions d'appui) ne reposent pas dans le même plan (problème spatial), dans le cas général la section droite peut être le siège de six efforts intérieurs qui sont les composantes du vecteur principal et du moment principal du système des forces intérieures (fig. I.9) : l'effort normal N, l'effort tranchant Q_y, l'effort tranchant Q_x et trois moments M_y, M_x et M_z, les deux premiers étant des moments fléchissants, et le troisième, M_z, agissant dans le plan de la section, appelé *moment de torsion* T du fait qu'il est produit par la torsion de la barre. Pour calculer ces six efforts, il faut utiliser six équations d'équilibre : annuler les sommes des projections des forces (appliquées à la partie sectionnée) sur les trois axes des coordonnées et annuler les sommes des moments des forces par rapport aux trois axes à origine au centre de gravité de la section.

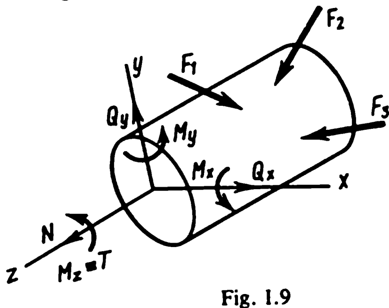


Fig. I.9

Sur la figure I.9 et sur celles qui suivent on a adopté le *système de coordonnées à droite*, l'axe z coïncidant avec celui de la barre.

Ainsi, pour trouver les efforts intérieurs il faut 1) couper en pensée la barre ou le système de barres ; 2) rejeter une partie ; 3) appliquer à la section les efforts susceptibles d'équilibrer les forces extérieures appliquées à la partie sectionnée ; 4) calculer les efforts à l'aide des équations d'équilibre composées pour la partie découpée.

Dans un cas particulier, la section droite d'une barre peut être le siège :

1) du seul effort normal N. C'est le cas de la sollicitation appelée *traction* (si l'effort N est dirigé à partir de la section) ou *compression* (si l'effort N est dirigé vers la section) ;

2) du seul effort tranchant Q_x ou Q_y. C'est le cas du *cisaillement* ;

3) du seul moment de torsion T. C'est le cas de la *torsion* ;

4) du seul moment fléchissant M_y ou M_z. C'est le cas de la *flexion* ;

5) de plusieurs efforts, par exemple, des moments fléchissant et de tor-

sion. C'est le cas des *déformations composées* ou de la *résistance composée* qui sera décrit à la fin du cours.

Si le nombre d'efforts inconnus est égal au nombre d'équations d'équilibre, le problème est dit *isostatique*; lorsque le nombre d'efforts inconnus est supérieur à celui d'équations d'équilibre, on dit que le problème est *hyperstatique*.

Pour les problèmes hyperstatiques en plus des équations d'équilibre il faut utiliser encore les équations supplémentaires fournies par l'examen des déformations du système (cf. § 20).

Illustrons l'application de la méthode des sections par deux exemples.

Exemple I.1. Calculer les efforts dans les barres AB et BC du système de la figure I.10.

Solution. Pour déterminer les efforts subis par les barres AB et BC, recourons à la méthode des sections. Réalisons la coupe $a-a$, rejetons la partie gauche des barres et considérons l'équilibre de la partie droite.

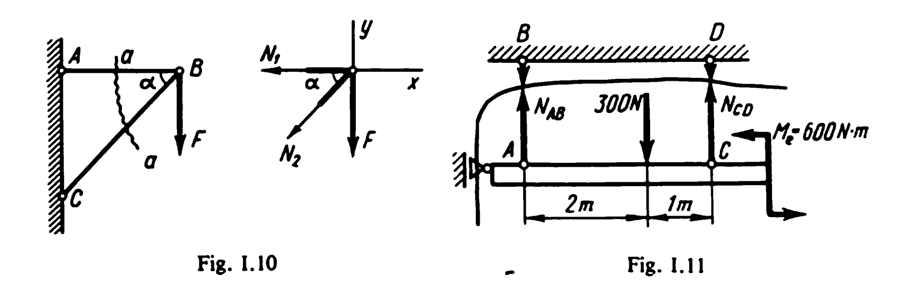


Fig. I.10 Fig. I.11

Supposons d'abord que les deux barres sont sollicitées à la traction (sur le dessin les efforts de traction sont orientés à partir du nœud) et notons ces efforts N_1 et N_2. Composons les équations d'équilibre de la partie découpée du système:

$$\sum Y = 0; \quad -F - N_2 \sin\alpha = 0. \quad \text{D'où} \quad N_2 = -F/\sin\alpha.$$

Le signe moins indique que l'effort N_2 ne sera pas, comme nous l'avons supposé, une traction, mais une compression. Composons la deuxième équation d'équilibre:

$$\sum X = 0; \quad -N_1 - N_2 \cos\alpha = 0.$$

En portant la valeur de $N_2 = -F/\sin\alpha$, on obtient $N_1 = F \operatorname{cotg}\alpha$.

Exemple I.2. Calculer les efforts dans les barres AB et CD du système de la figure I.11.

Solution. Considérons l'équilibre de la partie du système au-dessous de la section. En annulant la somme des projections sur l'axe horizontal, trouvons que la réaction d'appui horizontale de l'articulation (à gauche du point A) est nulle.

En égalant à zéro la somme des moments par rapport à A de toutes les forces appliquées à la partie découpée, on obtient

$$\sum M_A = 0; \quad -300 \cdot 2 + N_{CD} \cdot 3 + 600 = 0, \quad \text{d'où} \quad N_{CD} = 0.$$

Annulons maintenant la somme des projections de ces mêmes forces sur la verticale pour obtenir

$$\sum Y = 0; \quad N_{AB} - 300 = 0, \quad \text{d'où} \quad N_{AB} = 300 \text{ N}.$$

La valeur positive de N_{AB} témoigne que cet effort est orienté dans le sens indiqué par le dessin, c'est-à-dire c'est une traction.

§ 6. Contraintes

Nous avons déjà dit qu'une section droite de la barre est soumise non pas à des efforts N, Q, T, etc. intérieurs concentrés, mais à des forces à distribution continue dont l'intensité peut différer aux points différents de la section et dans des directions différentes.

Comment faire alors pour mesurer l'intensité des forces intérieures en un point donné de la section donnée, par exemple au point B (fig. I.12) ?

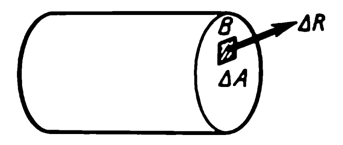


Fig. I.12

Dégageons autour du point B une petite aire ΔA. Soit ΔR la résultante des forces intérieures appliquées à cette aire. Alors, la valeur moyenne des forces intérieures rapportées à l'unité de surface ΔA de l'aire envisagée est

$$p_{\text{moy}} = \Delta R/\Delta A. \tag{I.1}$$

La quantité p_{moy} s'appelle *contrainte moyenne*. Elle caractérise l'intensité moyenne des forces intérieures. En diminuant les dimensions de l'aire, on obtient à la limite

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta R/\Delta A. \tag{I.2}$$

La quantité p s'appelle *contrainte réelle* ou simplement *contrainte* au point donné de la section donnée. On peut dire en simplifiant qu'une contrainte est une force intérieure appliquée à l'unité de surface au point donné de la section donnée.

D'après les formules (I.1) et (I.2) la dimension de la contrainte est

[force]/[surface].

L'unité de contrainte est le pascal (symbole Pa) : $\text{Pa} = \text{N/m}^2 = \frac{\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2} = \text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

Les valeurs réelles des contraintes étant ainsi exprimées par des nombres très grands, il faut employer des multiples de ces unités, par exemple MPa (mégapascal) = 10^6 Pa.

La contrainte totale p peut être décomposée en deux composantes (fig. I.13, *a*) : 1) l'une normale au plan de la section notée σ et appelée *normale*; 2) l'autre reposant dans le plan de la section, notée τ et dite *tangentielle*. Suivant les forces appliquées, cette dernière peut avoir dans le plan de la section une direction quelconque. Par commodité, τ est représentée sous la forme de deux composantes orientées dans le sens des axes des coordonnées (fig. I.13, *b*).

Les notations adoptées sont illustrées par la figure I.13, *b*.

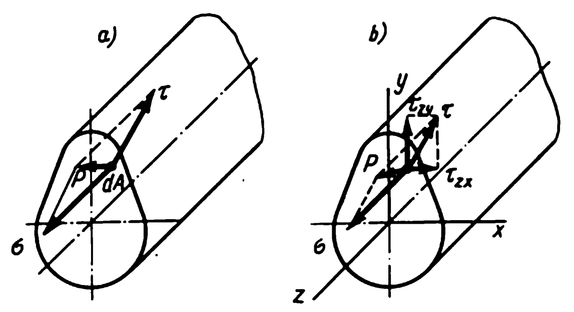


Fig. I.13

La contrainte normale est affectée d'un indice qui indique l'axe des coordonnées auquel la contrainte envisagée est parallèle. On admet que la contrainte normale *de traction* est *positive*, et *de compression*, *négative*. Les symboles des contraintes tangentielles sont affectés de deux indices, dont l'un indique l'axe auquel est parallèle la normale à l'aire active de la contrainte envisagée, et l'autre, l'axe auquel est parallèle la contrainte elle-même.

La décomposition de la contrainte totale en contraintes normale et tangentielle a un sens physique défini. La contrainte normale apparaît lorsque les particules du matériau tendent à s'éloigner les unes des autres, ou, au contraire, s'en rapprocher. Les contraintes tangentielles sont liées au cisaillement des particules du matériau suivant le plan de la section donnée.

Si autour d'un point du corps on découpe en pensée un élément sous forme d'un cube infiniment petit, dans le cas général, ses faces seront soumises aux contraintes représentées sur la figure I.14.

L'ensemble des contraintes sur toutes les aires élémentaires qui peuvent être menées par un point du corps s'appelle *état de contrainte* au point donné.

Si les faces du cube sont soumises seulement aux contraintes normales, elles sont dites *principales*, et les aires suivant lesquelles elles agissent sont dites *principales*. On peut montrer qu'en tout point d'un corps sollicité il existe trois aires principales réciproquement perpendiculaires.

Les contraintes principales sont notées σ_1, σ_2 et σ_3. Compte tenu du signe, la contrainte principale maximale est notée σ_1, et minimale, σ_3.

Les formes différentes de l'état de contrainte sont classifiées en fonction du nombre de contraintes principales en action.

Si toutes les trois contraintes principales diffèrent de zéro, l'état de contrainte est dit *triaxial* ou *volumique* (fig. I.15). Si l'une des contraintes principales est nulle, on dit que l'état de contrainte est *biaxial* ou *plan*. Si deux

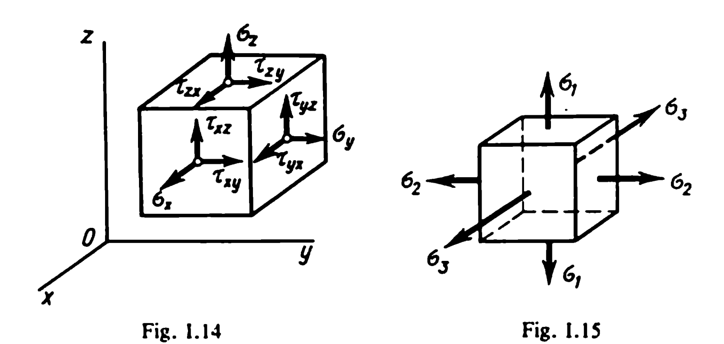


Fig. I.14 Fig. I.15

contraintes principales sont nulles, l'état de contrainte est *uniaxial* ou *linéaire*.

En connaissant l'état de contrainte en un point d'une pièce, on peut évaluer sa résistance. Dans les cas les plus simples, la résistance des éléments des ouvrages est évaluée soit d'après la contrainte normale maximale, soit d'après la contrainte tangentielle maximale (calcul au cisaillement), de sorte que la *condition de résistance* s'écrit

$$\sigma_{max} \leqslant \sigma_{adm} \qquad (I.3)$$

ou

$$\tau_{max} \leqslant \tau_{adm}, \qquad (I.4)$$

où σ_{adm} et τ_{adm} sont les valeurs admissibles des contraintes normale et tangentielle dépendant du matériau et des conditions du service de l'élément étudié.

Les grandeurs σ_{adm} et τ_{adm} sont choisies de façon à assurer le service normal de la construction (cf. §11).

Pour les cas plus compliqués, la résistance est évaluée d'après la *contrainte réduite* conformément à telle ou telle hypothèse de la résistance (cf. chapitre VIII).

Dans ce qui suit, nous montrons que quelquefois il est plus correct d'employer pour la composition des conditions de résistance de la pièce non pas les contraintes, mais les charges, du fait que l'application au point le plus dangereux de la valeur limite d'une contrainte n'entraîne pas toujours la rupture de la pièce.

CHAPITRE II.

TRACTION ET COMPRESSION

§ 7. Détermination des efforts intérieurs

Considérons le cas de la traction et de la compression axiales (centrales) lorsque les forces extérieures agissent suivant l'axe de la barre (fig. II.1). Pour déterminer les efforts intérieurs (forces longitudinales ou normales) appliquons la méthode des sections.

Réalisons une coupe, par exemple suivant *a—a*, et examinons l'équilibre de la partie découpée. Remplaçons l'action du tronçon supérieur rejeté sur le tronçon inférieur par une force normale que nous orienterons au préalable à partir de la section, c'est-à-dire supposons qu'il s'agisse de la traction. Composons l'équation d'équilibre. Projetant toutes les forces subies par la partie inférieure sur la direction parallèle à l'axe de la barre et annulant la somme des projections on obtient $N_1 + 8F - 5F = 0$, d'où $N_1 = -3F$.

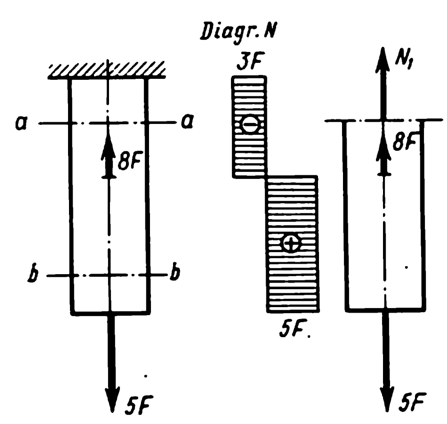


Fig. II.1

Le signe moins montre que la direction de la force N_1 doit être inversée, c'est-à-dire que la force normale réalise non pas la traction, comme nous l'avons supposé, mais la compression. Trouvons d'une façon analogue la

force normale qui agit dans la section *b—b* : $N_2 = 5F$ (traction). Convenons que la force normale qui correspond à la traction est positive.

Une idée suggestive de la variation des forces normales suivant la longueur de la barre est donnée par leur diagramme, dont l'axe des abscisses est parallèle à l'axe de la barre, et l'axe des ordonnées lui est perpendiculaire. A l'échelle retenue portons en ordonnées les valeurs des forces normales (compte tenu des signes) subies par les sections droites de la barre. Pour le cas considéré, le diagramme de N est représenté sur la figure II.1.

§ 8. Détermination des contraintes

Si à la surface d'une barre (pièce) prismatique on porte un réseau de lignes parallèles et perpendiculaires à l'axe (fig. II.2, *a*) et si on soumet la barre à la traction, on peut établir après la déformation que les lignes du réseau restent réciproquement perpendiculaires sauf en un petit secteur au

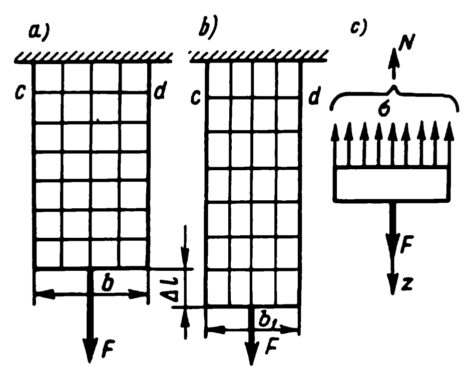


Fig. II.2

voisinage du point d'application de la force, que pour le moment nous éliminons de l'examen*, mais les distances entre les lignes changent (fig. II.2, *b*). Toutes les lignes horizontales, par exemple *cd*, se déplacent en bas tout en restant horizontales et droites. On peut supposer qu'il en sera de même à l'intérieur de la barre, c'est-à-dire que *ses sections droites planes et normales à son axe avant la déformation restent telles après la déformation*. Cette hypothèse importante s'appelle *hypothèse des sections planes* ou *hypothèse de Bernoulli*. Les formules qu'elle permet d'établir sont confirmées par les expériences.

Cette allure des déformations autorise à considérer que les sections droites d'une barre sont sollicitées seulement par les contraintes normales

---

* Ceci n'est pas visualisé sur la figure II.2.

réparties uniformément dans la section, alors que les contraintes tangentielles sont nulles.

La force longitudinale N est dans la section droite la résultante des contraintes normales

$$N = \int_A \sigma \mathrm{d}A. \tag{II.1}$$

Etant donné que σ = const, la formule (II.1) entraîne

$$N = \sigma A,$$

d'où

$$\sigma = N/A. \qquad \textbf{[II.2]*}$$

Dans le cas particulier lorsque la barre subit la force extérieure F, l'équation d'équilibre implique $N = F$ (fig. II.2, c), et au lieu de la formule générale [II.2] on obtient la forme partielle de la formule de la traction

$$\sigma = F/A. \tag{II.2a}$$

Ces formules sont également valables pour la compression, à cette différence que les contraintes de compression sont considérées comme négatives.

Par ailleurs, en plus du calcul à la résistance, les barres comprimées sont calculées encore à la stabilité (cf. chapitre X).

§ 9. Détermination des déformations et des déplacements

Les expériences montrent qu'en traction la longueur de la barre augmente, alors que ses dimensions transversales diminuent ; dans le cas de la compression, c'est l'inverse (fig. II.2, b).

Pour de nombreux matériaux sollicités par une charge jusqu'à des limites définies, les expériences montrent que la relation entre l'allongement relatif ε et la contrainte σ est de la forme

$$\varepsilon = \sigma/E, \qquad \textbf{[II.3]}$$

où $\varepsilon = \Delta l/l = (l_1 - l)/l$ est l'allongement relatif de l'éprouvette ; Δl, l'allongement absolu de l'éprouvette ; l, la longueur de l'éprouvette avant la déformation ; l_1, cette même longueur après la déformation.

* La formule **[II.2]** et les formules les plus importantes qui suivent sont placées entre crochets et marquées aux lettres en caractères gras.

Cette relation porte le nom de la LOI DE HOOKE: *les déformations linéaires sont directement proportionnelles aux contraintes normales*.

Le coefficient E qui figure dans la formule [II.3] et qui est fonction du matériau s'appelle *module d'Young* ou *module d'élasticité longitudinale*. Il caractérise la rigidité du matériau, c'est-à-dire sa propriété de résister à la déformation.

Puisque ε est une grandeur adimensionnelle, la formule [II.3] montre que l'unité de mesure de E est la même que pour σ, c'est-à-dire le pascale (Pa).

Le tableau II.1 donne les valeurs moyennes de E de certains matériaux.

Tableau II.1

Matériau	E, MPa	Matériau	E, MPa
Acier	$2 \cdot 10^5$ à $2{,}2 \cdot 10^5$	Aluminium	$0{,}675 \cdot 10^5$
Cuivre	$1 \cdot 10^5$	Fonte	$0{,}75 \cdot 10^5$ à $1{,}6 \cdot 10^5$
Bois	$1 \cdot 10^4$	Plastiques verre-résine	$0{,}18 \cdot 10^5$ à $0{,}4 \cdot 10^5$

Pour les autres matériaux les valeurs de E sont données par les ouvrages de référence.

Si l'on tient compte que pour une barre de section constante $\varepsilon = \Delta l/l$ et $\sigma = N/A$, on peut obtenir à partir de [II.3] la formule de l'allongement (raccourcissement) total (absolu) de la barre

$$\Delta l = Nl/(EA). \qquad \textbf{[II.4]}$$

Les déformations longitudinale ε et transversale ε' sont associées par la relation empirique

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon. \qquad (II.5)$$

Ici ν est le *coefficient de déformation transversale* (coefficient de Poisson) qui caractérise l'aptitude du matériau à subir des déformations transversales. En utilisant la formule (II.5), on admet que l'allongement est une déformation positive, et le raccourcissement, une déformation négative. Pour tous les matériaux la valeur de ν varie dans les limites $0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5$, et pour la plupart d'entre eux, de 0,25 à 0,35 (tableau II.2).

Pour les déformations élastiques de l'acier on peut adopter $\nu \approx 0{,}3$. En connaissant ε' on peut calculer le rétrécissement transversal total ou l'élargissement de la barre Δb :

$$\varepsilon' = \Delta b/b, \qquad \Delta b = b - b_1, \qquad (II.6)$$

où b est la dimension transversale initiale de la barre ; b_1, sa dimension transversale après déformation.

Tableau II.2

Matériau	ν	Matériau	ν
Acier	0,25 à 0,33	Plomb	0,45
Cuivre	0,31 à 0,34	Laiton	0,32 à 0,42
Bronze	0,32 à 0,35	Aluminium	0,32 à 0,36
Fonte	0,23 à 0,27	Zinc	0,21
Verre	0,25	Pierres	0,16 à 0,34
Béton	0,08 à 0,18	Caoutchouc	0,47
Liège	0,00	Contreplaqué	0,07
Celluloïde	0,39		

Pour les barres de section variable (fig. II.3), on peut admettre que dans les sections droites les contraintes sont réparties uniformément (si l'angle au cône $\alpha \leqslant 12°$) et les calculer d'après la même formule [II.2] que pour une barre à section constante.

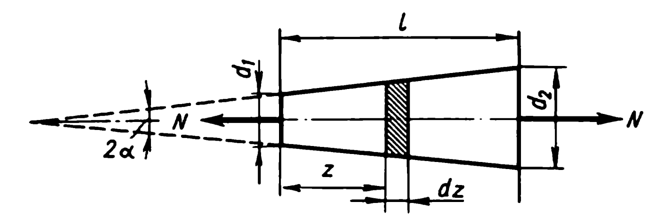


Fig. II.3

Pour déterminer les déformations d'une barre à section variable dont les sections droites sont sollicitées par un effort normal N, cherchons d'abord l'allongement $\Delta(dz)$ *d'un élément de longueur* dz, différentielle de l'allongement total Δl. En vertu de la loi de Hooke, on a

$$\Delta(dz) = d(\Delta l) = Ndz/(EA). \qquad (II.7)$$

L'allongement total de la barre s'obtient en intégrant l'expression (2.7) dans les limites de $z = 0$ à $z = l$:

$$\Delta l = \int_0^l Ndz/(EA). \qquad (II.8)$$

Si N et E sont des constantes, il vient

$$\Delta l = \frac{N}{E}\int_0^l \frac{dz}{A}. \qquad (II.9)$$

Pour utiliser cette formule, il faut connaître la loi de variation de A en fonction de z.

Pour les barres à gradins (fig. II.4), l'intégration est remplacée par la sommation et la variation totale de la longueur de la barre se calcule comme la somme algébrique des déformations de ses parties isolées, dans les limites desquelles E, N et A sont constantes:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta l_i = \sum \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \tag{II.10}$$

Par exemple, pour la barre de la figure II.4, on a

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = N_1 l_1/(E_1 A_1) + N_2 l_2/(E_1 A_2),$$

où $N_1 = N_2 = F$.

Calculons maintenant l'allongement de la barre de section constante sous l'action de la pesanteur qui est une charge uniformément répartie suivant la longueur (fig. II.5,a). Notons γ le poids spécifique du matériau de

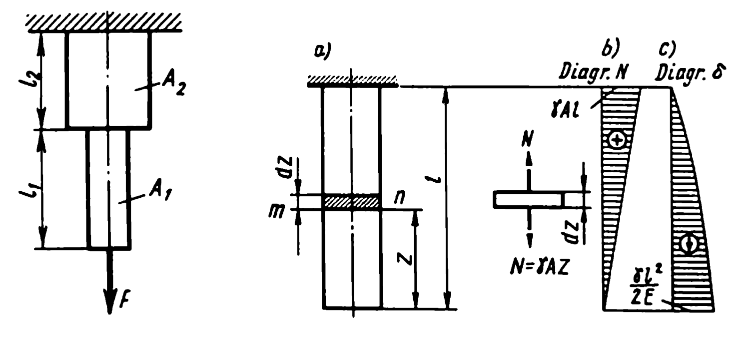


Fig. II.4 Fig. II.5

la barre. Considérons la déformation d'un élément dz extrait à la distance z de l'extrémité inférieure. Elle est étendue par la force $\gamma A z$ égale à la pesanteur de la partie de la barre située au-dessous de la section m—n. L'allongement de l'élément vaut

$$\Delta(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}(\Delta l) = \gamma A z \mathrm{d}z/(EA) = \gamma z \mathrm{d}z/E. \tag{II.11}$$

En intégrant cette expression de $z = 0$ à $z = l$ on obtient l'allongement de la barre

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\gamma}{E} z \mathrm{d}z = \frac{\gamma l^2}{2E}. \tag{II.12}$$

Cette expression peut être mise sous une autre forme si l'on tient compte que la pesanteur de la barre est $G = \gamma A l$, c'est-à-dire $\gamma l = G/A$.

Alors, (II.12) entraîne

$$\Delta l = Gl/(2EA). \tag{II.13}$$

Par conséquent, *l'allongement d'une barre à section constante sous l'action de la pesanteur propre est deux fois inférieur à celui dû à l'action d'une force égale à la pesanteur de la barre et appliquée à son extrémité.*

Le déplacement δ_z de la section m—n est égal à l'allongement de la partie de la barre d'une longueur l—z. D'après la formule (II.12), on a

$$\delta_z = \int_z^l \frac{\gamma}{E} z dz = \frac{\gamma}{2E}(l^2 - z^2).$$

La figure II.5, *b* représente le diagramme de N. Le signe plus indique qu'il s'agit de la traction. Le diagramme des déplacements est représenté sur la figure II.5, *c*. La flèche sur le diagramme montre que toutes les sections de la tige se déplacent vers le bas.

Exemple II.1. Calculer pour la barre en acier de la figure II.6 l'effort normal N et la contrainte σ subis par toutes les sections droites. Calculer également les déplacements verticaux δ de toutes les sections droites de la barre. Visualiser les résultats en traçant les diagrammes de N, σ et δ.

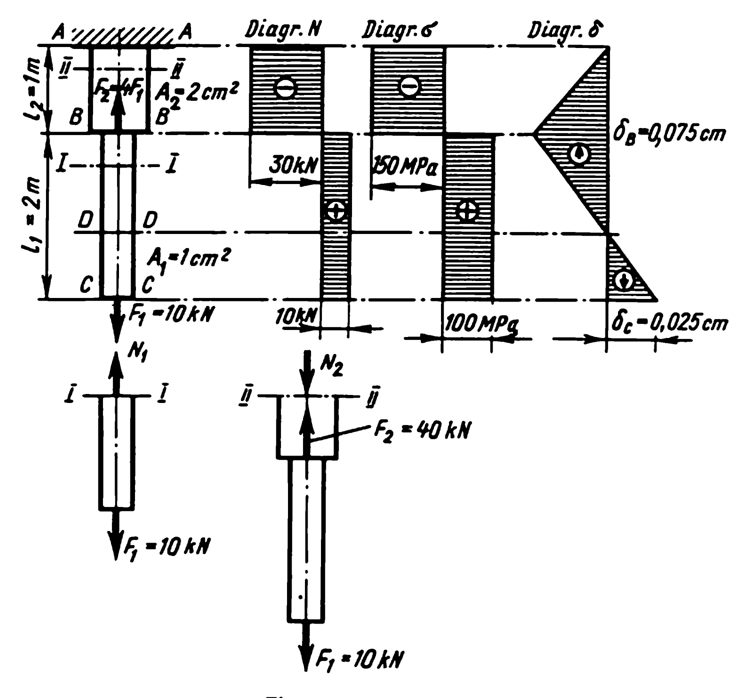


Fig. II.6

Solution. Pour déterminer N, coupons d'abord en pensée la barre suivant les sections $I—I$ et $II—II$. D'après les conditions d'équilibre de la partie de la barre au-dessous de la section $I—I$, $N_1 = F_1 = 10$ kN (traction). La condition d'équilibre de la partie de la barre au-dessous de la section $II—II$ amène $-N_2 + F_2 - F_1 = 0$ ou $N_2 = 30$ kN (compression).

Choisissons une échelle pour construire le diagramme des efforts normaux en adoptant que l'effort normal de traction N_1 est positif et que l'effort de compression N_2 est négatif. Les contraintes valent : dans les sections de la partie inférieure de la barre,

$$\sigma_1 = N_1/A_1 = 10^4/(1 \cdot 10^{-4}) = 100 \text{ MPa (traction)} ;$$

dans les sections de la partie supérieure,

$$\sigma_2 = N_2/A_2 = -30 \cdot 10^3/(2 \cdot 10^{-4}) = -150 \text{ MPa (compression)}.$$

Construisons à l'échelle retenue le diagramme des contraintes.

Pour construire le diagramme de δ déterminons les déplacements des sections caractéristiques $B—B$ et $C—C$ (le déplacement de la section $A—A$ est nul).

La section $B—B$ se déplace en haut puisque la partie supérieure de la barre est comprimée:

$$\delta_B = \sigma_2 l_2/E = -150 \cdot 1/(2 \cdot 10^5) = -0{,}00075 \text{ m} = -0{,}075 \text{ cm (en haut)}.$$

Admettons que le déplacement de la section en bas est positif, et en haut, négatif.

Le déplacement de la section $C—C$ est une somme algébrique du déplacement de la section $B—B$ (δ_B) et de l'allongement de la partie de la barre de longueur l_1 :

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l = -0{,}00075 + \sigma_1 l_1/E = -0{,}00075 + \frac{100 \cdot 2}{2 \cdot 10^5} = 0{,}00025 \text{ m} =$$
$$= 0{,}025 \text{ cm (en bas)}.$$

Portons sur le diagramme à l'échelle retenue les valeurs de δ_C et δ_B, relions les points obtenus par des lignes droites du fait que lors de l'action des forces concentrées extérieures, les déplacements dépendent linéairement des abscisses des sections de la barre, pour obtenir ainsi le diagramme des déplacements. Ce diagramme montre qu'une certaine section $D—D$ ne se déplace pas. Les sections au-dessus de $D—D$ se déplacent en haut, et celles qui se trouvent au-dessous, se déplacent en bas.

Exemple II.2. Calculer l'allongement d'une barre de forme conique à section droite circulaire si son diamètre minimal est d_1, et maximal, d_2 (cf. fig. II.3).

Solution. Le diamètre de la section de la barre à la distance z de l'extrémité gauche vaut

$$d_z = d_1 + (d_2 - d_1)z/l.$$

Par conséquent, la surface de la section de la barre à la distance z est

$$A_z = \frac{\pi d_z^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z\right)^2.$$

D'après la formule (II.9), l'allongement de la barre

$$\Delta l = \frac{4N}{\pi E}\int_0^l \frac{dz}{\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} z\right)^2} = \frac{4Nl}{\pi E d_1 d_2},$$

on en tire pour $d_1 = d_2 = d$ la valeur de l'allongement d'une barre à section constante (circulaire).

§ 10. Etude expérimentale des propriétés des matériaux

Destination et modes des essais. Pour étudier les propriétés des matériaux et établir les valeurs des contraintes limites (d'après la rupture ou les déformations plastiques), les éprouvettes du matériau sont soumises aux essais poussés jusqu'à la rupture. Les charges appliquées pendant les essais peuvent être statiques, par choc et cycliques (essais à la fatigue ou à l'endurance).

D'après le type de la déformation subie par l'éprouvette on distingue les essais à la traction, à la compression, à la torsion et à la flexion. Il est bien plus rare qu'on procède aux essais à la résistance composée, par exemple à la traction avec torsion.

Les résultats de l'essai dépendant de la forme de l'éprouvette, de la vitesse de sa déformation, de la température de l'essai, etc., l'expérience est

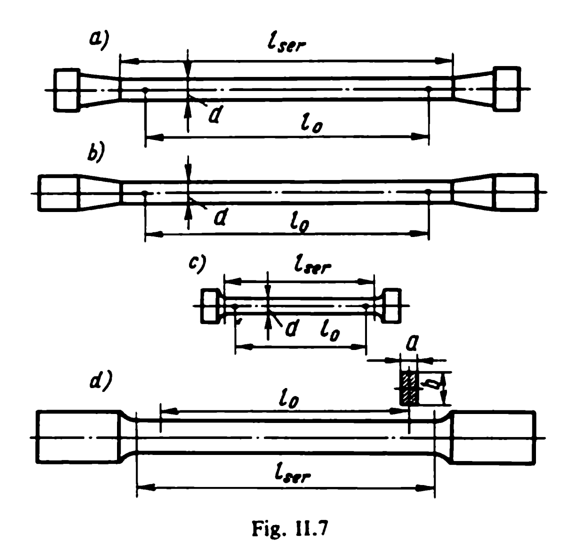


Fig. II.7

conduite généralement suivant les conditions prévues par les normes d'Etat (GOST).

Les essais sont réalisés sur des machines qui diffèrent suivant la construction et la puissance. Pour mesurer la déformation on emploie des extensomètres à sensibilité élevée. La description détaillée des machines et appareils employés pour les essais est donnée par des notices appropriées.

Diagrammes de traction et de compression. Les plus usités sont les essais à la traction sous une charge statique, du fait qu'ils sont les plus simples tout en assurant dans de nombreux cas l'évaluation correcte du comportement du matériau dans le cas des déformations différentes.

La figure II.7 représente les éprouvettes utilisées en U.R.S.S. aussi bien cylindriques de diamètre 3 mm et plus (fig. II.7, *a, b, c*) que plates

(fig. II.7, *d*) de 0,5 mm et plus d'épaisseur, leur longueur de calcul initiale étant $l_0 = 5{,}65\sqrt{A}$ ou $l_0 = 11{,}3\sqrt{A}$. Dans le premier cas, les éprouvettes sont dites *courtes* et dans le deuxième, *longues*.

Les rapports entre les longueurs de service $l_1 = l_{ser}$ et de calcul l_0 sont : pour les éprouvettes cylindriques de $l_1 = l_0 + 0{,}5d_0$ à $l_1 = l_0 + 2d_0$; pour les éprouvettes plates d'épaisseur 4 mm et plus de $l_1 = l_0 + 1{,}5\sqrt{A}$ à $l_1 = l_0 + 2{,}5\sqrt{A}$.

Les éprouvettes cylindriques sont employés surtout avec $d_0 = 10$ mm.

Les essais à la traction ont pour tâche de déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau. Pendant l'essai la machine enregistre automatiquement la courbe de la relation entre la force étendant l'éprouvette F et l'allongement Δl de celle-ci. L'exemple d'une telle courbe est donné par la figure II.8.

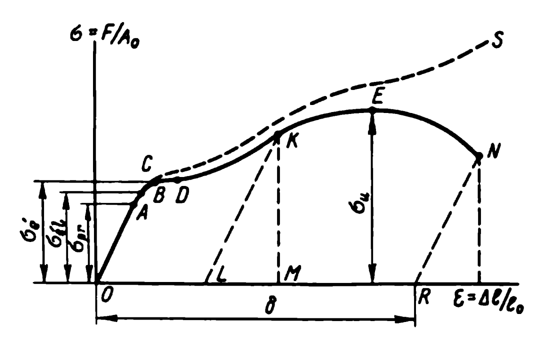


Fig. II.8

Pour rendre possible la comparaison des résultats des essais des éprouvettes de même matériau mais de dimensions différentes, le diagramme de traction est remanié pour être représenté dans un autre système de coordonnées, en portant en ordonnées la contrainte normale subie par la section droite de l'éprouvette $\sigma_t = F/A_0$, où A_0 est *l'aire initiale* de la section, et en abscisses, l'allongement relatif de l'éprouvette $\varepsilon = \Delta l/l_0$, où l_0 est sa *longueur de départ*.

Ce diagramme s'appelle *diagramme* de traction *conventionnel* ou diagramme des contraintes conventionnelles, les contraintes et les allongements relatifs se calculant respectivement par rapport à l'aire initiale de la section et à la longueur initiale de l'éprouvette.

La figure II.8 représente en coordonnées ε, σ_t le diagramme de traction d'une éprouvette en acier à bas carbone. Au début, suivant le tronçon *OA* jusqu'à une certaine contrainte σ_{pr} appelée *limite de proportionnalité*, les déformations augmentent proportionnellement aux contraintes. C'est donc la limite jusqu'où la loi de Hooke reste valable. Pour l'acier Cт 3 cette limite $\sigma_{pr} \approx 210$ MPa. Lorsque la charge augmente, le diagramme devient curviligne.

Toutefois, si les contraintes ne dépassent pas une valeur définie de la *limite d'élasticité* $\sigma_{él}$, le matériau garde ses propriétés élastiques, c'est-à-dire dès que les forces appliquées sont supprimées, l'éprouvette reprend ses formes et dimensions initiales*.

Pour l'acier Cт 3 la limite d'élasticité $\sigma_{él} \approx 220$ MPa. La différence entre la limite de proportionnalité et la limite d'élasticité n'est pas grande et pratiquement on n'en tient pas compte.

Si on pousse encore la charge, il survient le moment (point *C*) où les déformations commencent à croître pratiquement sans que la charge augmente.

Le tronçon horizontal CD du diagramme s'appelle *palier d'écoulement*. La contrainte à laquelle les déformations augmentent sans que la charge croît s'appelle *limite d'écoulement* notée $\sigma_{é}$. Pour l'acier Cт 3 la limite d'écoulement $\sigma_{é} \cong 230$ MPa. Le diagramme de plusieurs matériaux soumis à la traction ne comporte pas de palier d'écoulement bien marqué ; on établit alors la *limite d'écoulement* dite *conventionnelle*, notée $\sigma_{0,2}$, pour laquelle la déformation résiduelle est égale à 0,2 %. Ces matériaux sont en particulier le duralumin, le bronze, les aciers à haut carbone et alliés (par exemple, pour l'acier 37XH3A, $\sigma_{0,2} = 1000$ MPa).

D'après les études des éprouvettes en acier l'écoulement s'accompagne des déplacements réciproques importants des cristaux ; il en résulte à la surface de l'éprouvette des lignes (dites de *Lüders-Tchernov*) inclinées à l'axe de l'éprouvette sous un angle d'environ 45° (fig. II.9, *a*).

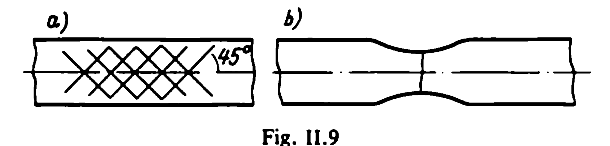


Fig. II.9

Après avoir enregistré un certain allongement sous une charge constante, c'est-à-dire après avoir subi l'état d'écoulement, le matériau acquiert de nouveau la propriété de résister à la traction (écrouissage), et après le point *D* la courbe monte de nouveau, bien que sa pente devient sensiblement plus faible (cf. fig. II.8).

Le point *E* du diagramme correspond à la contrainte conventionnelle maximale appelée *charge de rupture*. Pour l'acier Cт 3 la charge de rupture $\sigma_u = 380$ MPa. Pour les aciers à haute résistance la charge de rupture atteint 1700 MPa (acier 40 XMHA, etc.). La charge de rupture à la traction est notée $\sigma_{u,t}$ et à la compression, $\sigma_{u,c}$.

---

* D'après les normes d'Etat soviétiques, on appelle limite d'élasticité conventionnelle la contrainte à laquelle la déformation résiduelle atteint 0,05 %.

Lorsque la contrainte atteint la valeur de la charge de rupture il se forme sur l'éprouvette un rétrécissement local marqué appelé *striction* (fig. II.9, *b*). L'aire de la section de l'éprouvette au droit de la striction diminue rapidement, ce qui entraîne la chute de l'effort et de la contrainte conventionnelle. La rupture de l'éprouvette se produit suivant la plus petite section de la striction.

En plus des caractéristiques mentionnées l'essai de traction rend également possible la détermination de *l'allongement relatif résiduel à la rupture* ε_r qui traduit une propriété importante de la plasticité du matériau :

$$\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\ \%, \tag{II.14}$$

où l_0 est la longueur initiale de l'éprouvette (cf. fig. II.7) ; l_1, la longueur de l'éprouvette après la rupture. Cette grandeur est mesurée lorsque les deux parties rompues de l'éprouvette sont aboutées.

Pour l'acier Cт 3, $\varepsilon_r \geqslant 21\%$. Pour les aciers à haute résistance cette grandeur diminue jusqu'à 7 ou 10 %. La grandeur ε_r dépend de la relation entre la longueur de l'éprouvette et ses dimensions transversales. C'est pourquoi les ouvrages de référence renseignent toujours sur l'éprouvette qui a servi pour établir ε_r. Par exemple, $\varepsilon_{r,5}$ signifie que l'allongement a été déterminé pour une éprouvette dont le quotient de la longueur de calcul par le diamètre vaut cinq.

L'allongement établi par cette méthode est une moyenne, la distribution des déformations le long de l'éprouvette n'étant pas régulière. L'allongement maximal est enregistré au droit de la rupture et s'appelle *allongement réel à la rupture*.

La deuxième caractéristique de la plasticité du matériau est le *coefficient de striction après rupture*

$$\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\%, \tag{II.15}$$

où A_0 est l'aire initiale de la section droite ; A_1, l'aire de la plus petite section droite après rupture.

La grandeur ψ_r définit plus exactement la plasticité que ε_r du fait qu'elle dépend moins de la forme de l'éprouvette. Pour l'acier Cт 3, ψ_r vaut de 50 à 60 %.

Comme nous l'avons noté dans ce qui précède, pour de nombreuses nuances de l'acier, ainsi que des alliages des métaux non ferreux, les diagrammes de traction ne possèdent pas de palier d'écoulement. L'allure caractéristique de leur diagramme de traction est représentée sur la figure II.10.

Pour étudier les déformations plastiques importantes il faut connaître le ***diagramme de traction réel*** qui donne la relation entre les déformations et les contraintes réelles calculées par division de la force d'extension par l'aire réelle de la section droite compte tenu de la striction.

L'aire réelle de la section droite étant plus petite que l'aire initiale, la courbe des contraintes réelles passe au-dessus de celle des contraintes conventionnelles, surtout après la formation de la striction lorsque la section droite diminue brusquement (courbe *OCS* de la figure II.8).

Dans les cas courants, on applique les méthodes approchées du tracé des diagrammes des contraintes réelles décrites dans les cours complets de résistance des matériaux.

Le diagramme de traction envisagé (cf. fig. II.8) est caractéristique de ce qu'on appelle les ***matériaux plastiques***, c'est-à-dire des matériaux susceptibles de subir sans rupture des déformations résiduelles importantes.

Plus le matériau est plastique, plus ε_r est grand. Parmi les matériaux très plastiques il y a le cuivre, l'aluminium, le laiton, l'acier à bas carbone,

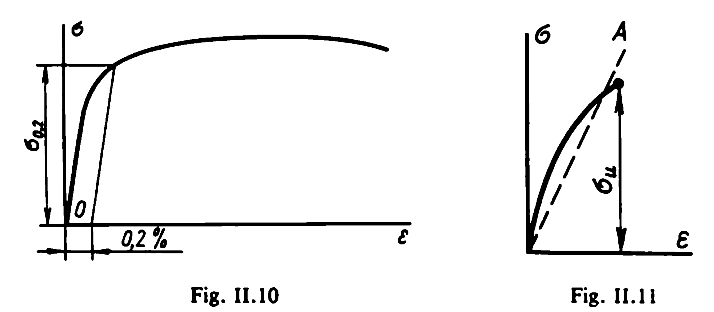


Fig. II.10

Fig. II.11

etc. Des matériaux moins plastiques sont le duralumin, le bronze ; les matériaux à faible plasticité sont la plupart des aciers alliés.

Le contraire de la plasticité est la ***fragilité*** qui est la propriété du matériau de subir la rupture sous des déformations résiduelles peu importantes. Pour de tels matériaux l'allongement résiduel à la traction vaut pas plus que 2 ou 5 %, et dans certains cas, il ne dépasse pas des fractions de pour cent. Aux matériaux fragiles on rapporte la fonte, l'acier à outils à haut carbone, la pierre, le béton, le verre, les plastiques verre-résine, etc. Il convient de noter que la division des matériaux en plastiques et fragiles est conventionnelle : suivant les conditions de l'essai (vitesse de chargement, température) et l'état de contrainte les matériaux fragiles peuvent se comporter comme plastiques et inversement.

Par exemple, dans les conditions d'une compression omnilatérale une éprouvette en fonte se comporte comme un matériau plastique, c'est-à-dire qu'elle résiste même à des charges importantes. Au contraire, une éprouvette à rainure en acier rompt même sous une déformation relativement faible.

De la sorte, il est plus correct de parler de l'état plastique ou fragile du matériau.

La traction des éprouvettes en matériaux fragiles présente certaines particularités. Le diagramme de traction de la fonte est représenté sur la figure II.11. Il montre que l'écart de la loi de Hooke débute très vite. La rupture subite survient sous des déformations très faibles et sans striction, ce qui est caractéristique de tous les matériaux fragiles.

Dans les cas courants, les essais de traction des matériaux fragiles établissent seulement la charge de rupture. Généralement, les calculs ne tiennent pas compte des écarts de la loi de Hooke pour les matériaux fragiles, c'est-à-dire que la courbe du diagramme est remplacée par une droite conventionnelle (cf. le pointillé de la figure II.11).

Pour la fonte et les autres matériaux fragiles la charge de rupture à la traction est sensiblement influencée par les dimensions de l'éprouvette. Cet effet est évalué par les coefficients d'échelle

$$K_d = \sigma_{u,d}/\sigma_{u,10}, \tag{II.16}$$

où $\sigma_{u,d}$ est la charge de rupture de l'éprouvette d'un diamètre d; $\sigma_{u,10}$, la charge de rupture de l'éprouvette de 10 mm de diamètre.

La figure II.12 représente les courbes de la relation entre K_d et le diamètre de l'éprouvette pour les matériaux suivants : acier à haut carbone et à manganèse — *1* ; acier allié — *2* ; fonte inoculée — *3* ; fonte grise — *4* .

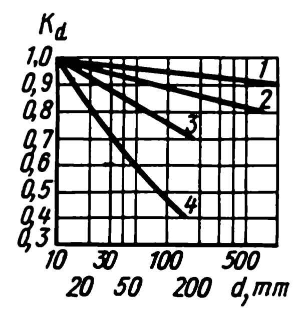


Fig. II.12

La grandeur K_d est particulièrement influencée par les dimensions absolues de l'éprouvette en fonte (courbes *3* et *4* de la figure II.12).

Il convient de noter que ces dernières années on a enregistré des succès importants dans la création des matériaux à haute résistance.

La valeur théorique de la charge de rupture calculée compte tenu de l'interaction des atomes dans le cristal constitue à peu près la dixième partie de E, c'est-à-dire pour l'acier environ 20 GPa, ce qui fait presque 10 fois plus que la charge de rupture des nuances d'acier à haute résistance existantes.

On peut s'approcher de la résistance théorique de deux façons. La première consiste à créer des matériaux affranchis des défauts intérieurs et possédant un réseau cristallin parfait. On a déjà obtenu des cristaux filiformes (appelés « whisker » ou « moustaches ») de fer et d'autres métaux complètement privés de défauts intérieurs. La charge de rupture de telles moustaches en fer atteint 15 GPa.

Une autre façon, tout paradoxal que cela paraisse, est directement opposée et consiste à créer des métaux possédant le plus possible de perturbations du réseau cristallin régulier. Ces perturbations ponctuelles et linéaires de la microstructure (dislocations) peuvent s'obtenir soit par combinaison de la déformation plastique du métal (écrouissage) avec le traitement thermique, soit par irradiation neutronique. Les atomes sont alors chassés du réseau cristallin pour former des vides ou lacunes, ou encore des atomes intersticiels sans emplacement. Ces défauts de microstructure font le métal plus résistant, rendant plus difficile le déplacement au sein du cristal, tout comme les surfaces rugueuses de deux barres rendent impossible leur glissement.

Amélioration de la limite d'écoulement conventionnelle lors de l'application des sollicitations répétées (écrouissage). Si, en sollicitant une éprouvette, la charge de rupture n'a pas été dépassée, la suppression de la charge fait disparaître toutes les déformations, et si on reprend la sollicitation, cette éprouvette se comporte de la même façon que lors du premier essai.

Mais si l'éprouvette subit une contrainte supérieure à la limite d'élasticité, par exemple une contrainte qui correspond au point K du diagramme II.8, la décharge emprunte la droite KL parallèle à la ligne OA. La partie élastique de la déformation (tronçon LM) disparaît, alors que sa partie plastique demeure (tronçon OL).

Si on reprend la sollicitation du matériau, le diagramme suit la droite LK jusqu'au point K lui-même*. L'allongement résiduel à la rupture est alors mesuré par la valeur du tronçon LR, c'est-à-dire qu'il est plus faible que dans le cas de la seule sollicitation initiale avant la rupture.

Par conséquent, lorsque l'éprouvette subit des sollicitations répétées étant étendue au préalable jusqu'à l'apparition des contraintes supérieures à la limite d'écoulement, la limite de proportionnalité monte jusqu'au niveau atteint par les contraintes sous la charge précédente. Si la décharge a été séparée de la sollicitation répétée par un intervalle de temps, la limite de proportionnalité augmente encore plus.

Il convient de noter que le diagramme $LKEN$ obtenu par sollicitations répétées ne possède pas de palier d'écoulement ; donc, pour une éprouvette ayant subi la décharge et une sollicitation répétée, il faut déterminer la limite d'écoulement conventionnelle ($\sigma_{0,2}$) qui est, évidemment, supérieure

---

* La ligne de la charge ne coïncide pas parfaitement avec celle de la décharge, mais l'écart est négligeable et on peut ne pas le prendre en considération.

à la limite d'écoulement enregistrée à la première sollicitation. Dans ce sens on peut dire que les sollicitations répétées rendent plus élevée la limite d'écoulement.

Le phénomène de l'augmentation de la limite de proportionnalité et de la diminution de la plasticité du matériau sous des sollicitations répétées s'appelle *écrouissage*. Souvent il est indésirable du fait que le matériau écroui devient plus fragile. Pourtant, dans de nombreux autres cas l'écrouissage est utile et on le crée artificiellement, par exemple, dans les pièces soumises à l'action des charges alternatives (cf. chapitre XII).

Influence du temps sur la déformation. Posteffet. Fluage. Relaxation. Les expériences montrent que la déformation survient non pas directement après l'application de la charge, mais après une certaine période de temps.

Si sous des contraintes qui correspondent au point S (fig. II.13) on cesse d'augmenter la charge en la laissant un certain temps invariable, la défor-

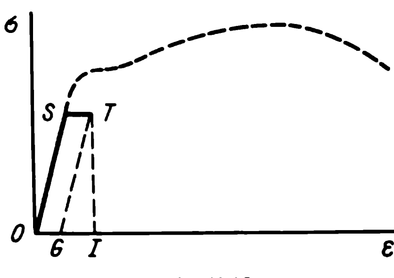


Fig. II.13

mation augmente (tronçon ST) d'abord vite et puis lentement. Après la suppression de la charge, une partie de la déformation relative au tronçon GI disparaît presque instantanément, alors que son autre partie, traduite par le tronçon OG, ne disparaît qu'après un certain temps*. Ce phénomène de variation des déformations élastiques dans le temps s'appelle *posteffet élastique*. Il est d'autant plus faible que le matériau est plus homogène. Pour les matériaux réfractaires il est si petit à l'ambiante, qu'on peut ne pas en tenir compte. Pour les matériaux d'origine organique le posteffet élastique est au contraire très grand et on ne peut pas le négliger.

Dans de nombreux matériaux soumis à la charge, on observe aux températures élevées un autre phénomène, celui de la croissance continue des déformations résiduelles, qui aboutit dans certaines conditions à la rupture du matériau. Par exemple, lorsqu'un tube d'acier conducteur de vapeur travaille sous des pressions et températures de la vapeur définies, son diamètre augmente.

---

* Pour rendre plus suggestif le tronçon ST, il est représenté sur la figure II.13 à une échelle sensiblement plus grande que le restant du diagramme.

La variation dans le temps des déformations plastiques d'une pièce chargée s'appelle *posteffet plastique*.

La variation dans le temps des déformations totales, c'est-à-dire de la somme des déformations élastiques et plastiques, porte le nom de *posteffet élasto-plastique* ou *fluage**.

Les métaux à basse température de fusion (par exemple, le zinc, le plomb), ainsi que le béton, subissent le fluage déjà aux températures normales. Pour l'acier, le fluage important se manifeste aux températures supérieures à 300 °C.

La contrainte à laquelle la vitesse du fluage à température donnée et charge constante présente une valeur définie donnée à l'avance, par exemple 0,0001 % par heure, s'appelle *limite de fluage suivant la vitesse de déformation admissible.*

Dans certains cas, la déformation de fluage doit être limitée. La *limite de fluage suivant la déformation admissible* est la contrainte à laquelle pendant un intervalle de temps donné la déformation atteint une valeur définie donnée à l'avance.

Un autre phénomène, la transformation dans le temps de la déformation élastique en déformation plastique, est intimement lié au fluage. Il en résulte la modification des contraintes appliquées, alors que la valeur totale de la déformation se conserve. Ce phénomène s'appelle *relaxation*. Cette dernière fait que dans les conditions du service prolongé à haute température les assemblages soumis au serrage deviennent plus lâches.

Influence de la température. Les expériences montrent que les propriétés des matériaux dépendent de la température.

La figure II. 14 représente plusieurs diagrammes de traction de l'acier à bas carbone (0,15 %C) pour des températures différentes, et les figures II.15 et II.16, pour le même acier les graphiques des relations entre les constantes élastiques (E et ν) et les caractéristiques mécaniques (σ_{pr}, $\sigma_{\acute{e}}$ et σ_u), ainsi qu'entre ψ_r et ε_r et la température. Sur la figure II.16 au lieu de ε_r il y a δ_r.

Les diagrammes montrent la forte influence de la température sur les propriétés de l'acier. Jusqu'à 300 °C, la charge de rupture augmente (de 20 à 30 %) pour diminuer brusquement lorsque la température continue de monter.

La limite d'écoulement et la limite de proportionnalité diminuent avec la température. A 400 °C la limite d'écoulement est de 60 à 70 % de sa valeur à l'ambiante. Avec la montée de la température la longueur du palier d'écoulement diminue et à 400 °C environ il disparaît tout à fait.

Lorsque la température monte jusqu'à 300 °C, les propriétés plastiques (allongement résiduel relatif de rupture ε_r et rétrécissement de l'aire de la

---

* Certains auteurs déterminent le fluage comme le posteffet plastique.

section droite ψ_r) diminuent pour augmenter lorsque la température continue de monter (fig. II.16).

Les propriétés mécaniques des matériaux dépendent de la durée de l'essai. A certaines températures, par exemple, à une température supérieure à 800 °C, si l'action de la contrainte se poursuit assez longtemps, une éprouvette en acier à bas carbone mise à l'essai peut subir la rupture sous une contrainte inférieure à la limite de proportionnalité propre à la température ambiante. C'est pourquoi la résistance des métaux à des températures élevées est définie non pas par la charge de rupture ordinaire déterminée par les essais de courte durée, mais par ce qu'on appelle *charge de rupture à longue durée* ($\sigma_{u.t}$). Cette charge de rupture est la contrainte conventionnelle dont l'action à température constante maintenue pendant un intervalle de temps défini conduit à la rupture de l'éprouvette.

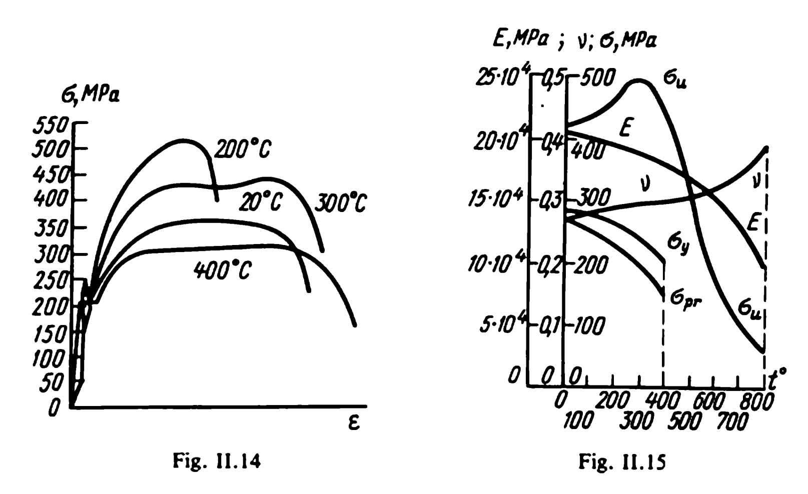


Fig. II.14

Fig. II.15

Les pièces prévues pour le travail à de hautes températures se font en aciers résistants à chaud et réfractaires, contenant des additions des éléments d'alliage spéciaux.

Par résistance à chaud ou *endurance thermique* de l'acier on entend son pouvoir de conserver une résistance élevée à des températures accrues, en particulier, une résistance élevée au fluage. A cet effet l'acier est allié au tungstène, molibdène, vanadium.

Par *réfractairité* on entend le pouvoir de l'acier de résister à la destruction chimique de la surface sous l'action de l'air ou du gaz chaud (corrosion gazeuse). Pour accroître la réfractairité, l'acier est allié au chrome, au silicium et à l'aluminium.

Certaines particularités des essais à la compression. Pour ces essais, on prend des éprouvettes sous la forme de petits cubes ou de cylindres peu hauts de $h \leqslant 3d$, des éprouvettes plus longues pouvant donner lieu au flambement.

L'utilisation des éprouvettes trop courtes est également indésirable du fait que les forces de frottement aux faces de l'éprouvette empêchent alors son élargissement et elle prend la forme d'un tonneau (fig. II.17, *a*, *b*).

Les résultats des essais à la compression dépendent des forces de frottement, ce qui rend plus avantageuses les éprouvettès cylindriques que les cubes.

L'influence des forces de frottement peut être affaiblie en partie par le graissage des faces (à la paraffine, par exemple).

La figure II.17, *b* traduit l'allure de la rupture d'un cube de pierre en l'absence de graissage, et la figure II.17, *c*, en présence de ce dernier. Ces

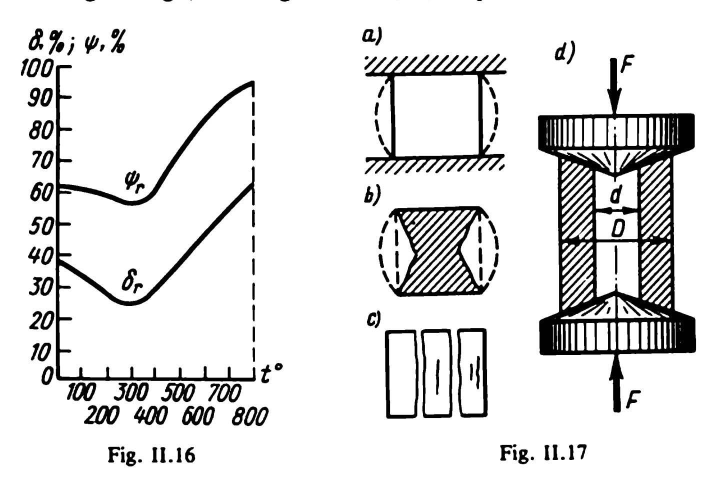


Fig. II.16

Fig. II.17

derniers temps pour les essais à la compression on commence à employer des éprouvettes creuses à faces coniques (fig. II.17, *d*). Le choix de la conicité correspondante permet de diminuer sensiblement l'action des forces de frottement. Le problème important de l'influence de ces forces sur la résistance impose des recherches expérimentales et théoriques ultérieures.

Le diagramme de compression d'un matériau fragile est analogue à son diagramme de traction (cf. fig. II.11). La rupture se produit avec des déformations négligeables. L'essai permet d'établir la charge de rupture et la déformation résiduelle relative de rupture.

Pour les matériaux fragiles, la charge de rupture à la compression est sensiblement plus élevée que celle à la traction.

Le diagramme type de compression d'un matériau plastique (acier à bas carbone) est représenté sur la figure II. 18, *a*. Au début, sa forme est analogue à celle du diagramme de traction. Puis la courbe monte brusquement du fait que l'aire de la section de l'éprouvette devient plus grande et que le matériau subit la consolidation. Dans ces conditions la rupture ne survient pas, l'éprouvette s'aplatit tout simplement (fig. II. 18, *b*), et on est obligé de mettre fin à l'expérience. L'essai permet de déterminer la limite d'écou-

lement à la compression. Pour les matériaux plastiques les limites de fluage à la traction et la compression sont presque les mêmes, mais à la compression le palier d'écoulement est bien moins net qu'à la traction.

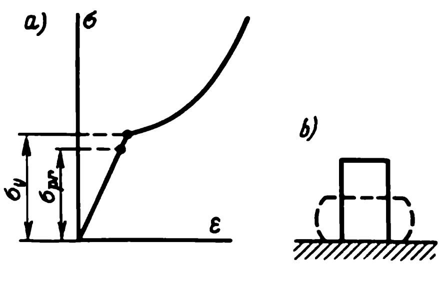


Fig. II.18

Propriétés mécaniques des matières plastiques. Ces dernières années on utilise toujours plus dans la construction de nouveaux matériaux élaborés sur la base des polymères naturels et synthétiques et appelés *matières plastiques*. Ce sont soit des résines pures, soit des combinaisons des résines et de plusieurs composantes: charge, plastificateur, stabilisateur, colorant, etc.

Suivant la charge employée les matières plastiques peuvent être *combinatoires* et *stratifiées*. Les matières plastiques combinatoires peuvent être à leur tour *pulvérulents, fibreux* et *à charge en miettes*.

Les *charges* peuvent être organiques et inorganiques ; elles servent à améliorer les propriétés physiques et mécaniques, de friction, etc. du matériau, ainsi qu'à baisser son prix.

On emploie comme charges organiques la poudre de bois, le cellulose, le papier, le tissu de coton. Parmi les charges inorganiques il y a l'amiante, le graphite, le tissu de verre, le mica, le quartz, etc. Les charges sous forme de laizes (tissée ou non tissée) permettent d'obtenir des matières plastiques stratifiées de haute résistance.

La charge sous forme de tissu de coton fournit le *textolite*, l'utilisation du tissu de verre permet d'obtenir le *stratifié à tissu de verre*, lorsqu'on emploie le papier, on obtient le *pertinax*, le tissu d'amiante donne *l'asbotextolyte*, le placage déroulé fournit les matières *plastiques stratifiées en bois*, enfin, en ajoutant du sable et des pierres cassées, on fabrique le *béton plastique*.

Un groupe de charges particulier est constitué des matériaux de renforcement à base de fibres de verre, de torons de verre, de panneaux de verre qui peuvent assurer la fabrication des pièces ne cédant pas en résistance à l'acier (tableau II.3)*.

---

* Les données du tableau II.3 se rapportent à des sollicitations de courte durée.

Les plastiques verre-résine obtenus sur la base des polyamides et polycarbonates s'emploient pour fabriquer des blindages. Les plastiques verre-résine sont utilisés pour la fabrication des pales des compresseurs, des

Tableau II.3

Charge de verre	Charge de rupture σ_u, MPa	Module d'élasticité E, MPa
Matelas de fibre de verre	140—210	(8 à 12) · 10^3
Matelas de fibre de verre à structure rhombique	500—600	(18 à 23) · 10^3
Tissu de verre	180—350	(14 à 21) · 10^3
Fibres de verre parallèles	780—1050	(23 à 40) · 10^3

moteurs d'aviation et des fusées, ce qui rend possible la diminution du poids de ces appareils.

Les plastiques renforcés à la fibre de verre résistent bien à l'action des charges dynamiques et sont susceptibles d'amortir les oscillations des éléments des constructions.

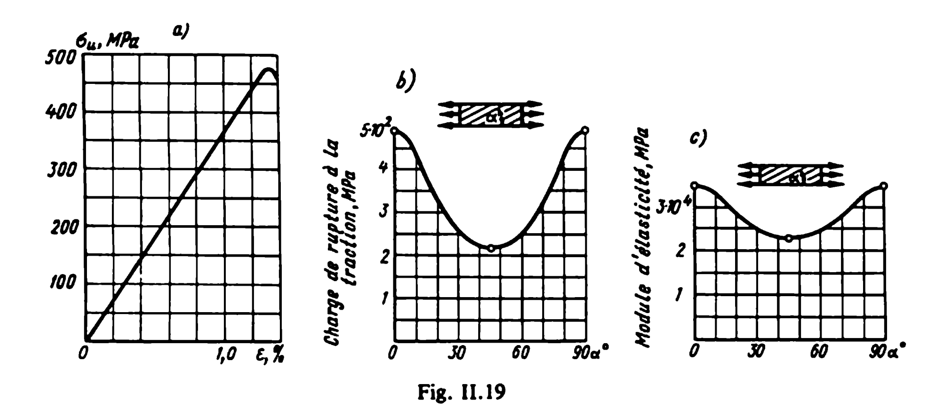


Fig. II.19

Les matières plastiques utilisées comme matériaux de construction présentent les particularités suivantes :

1) faible poids spécifique γ (1,2 · 10^4 à 1,9 · 10^4 N/m^3), ce qui rend possible grâce à la résistance élevée de réaliser des constructions très légères ;

2) les diagrammes de déformation des matières plastiques sont très variés ; ceux des matières plastiques armées de fibres de verre orientées, de CBAM par exemple, restent rectilignes presque jusqu'à la rupture (fig. II.19, *a*).

Mais pour la plupart des matières plastiques les diagrammes $\varepsilon - \sigma$ ont la forme d'une courbe régulière qui à une certaine distance de l'origine des coordonnées peut être assimilée à une droite.

L'allongement à la traction de la plupart des matières plastiques de construction ne dépasse pas 3 ou 4 %, c'est-à-dire il est sensiblement inférieur à celui des aciers ;

3) les caractéristiques mécaniques des matières plastiques diffèrent ordinairement pour la traction et la compression ;

4) leur résistance aux charges alternatives et de grande durée est bien plus faible que celle des métaux ;

5) la résistance et les caractéristiques élastiques des matières plastiques sont bien plus variées que dans le cas des métaux. Ceci résulte du vieillissement des matériaux, de l'hygroscopicité, de l'action de la température, de l'anisotropie de ces propriétés, de la structure hétérogène et de l'influence du processus de fabrication ;

6) l'effet d'échelle qui intervient dans le cas des matières plastiques est bien plus fort que pour les métaux. La charge de rupture des pièces en ces matières diminue sensiblement avec l'augmentation de la section droite.

La figure II.20 donne les valeurs du coefficient d'échelle K_d à la traction pour les plastiques verre-résine en fonction de l'aire de la section droite de l'éprouvette ;

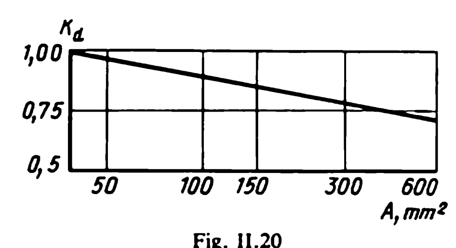


Fig. II.20

7) les propriétés des matières plastiques dépendent sensiblement de la température. La figure II.21 visualise les courbes qui traduisent la relation entre la charge de rupture des matières plastiques et la température. Leurs groupes principaux peuvent travailler dans l'intervalle de −200 à +250 °C ; avec l'apparition des matières plastiques à base des silicones et des plastiques fluorés la limite supérieure de la température a été poussée à 500 °C.

Les matières plastiques à base de résine siliconique gardent leur résistance jusqu'à −250 °C et tiennent pendant 2 mn à un échauffement jusqu'à 2750 °C ;

8) elles sont très susceptibles de fluage et de relaxation même à l'ambiante ;

9) les matières plastiques sont caractérisées par une faible rigidité, leur module d'élasticité même pour les plus rigides (plastiques verre-résine) est

environ 10 fois plus faible que celui de l'acier. Il s'ensuit que les déformations et les déplacements qu'enregistrent les pièces en matières plastiques sont plus grands que pour les pièces en acier ;

10) nombre de matières plastiques sont anisotropes, c'est-à-dire leurs propriétés diffèrent suivant la direction. L'anisotropie est particulièrement manifeste dans le cas des stratifiés. La figure II.19, *b*, *c* matérialise la relation entre la charge de rupture et le module d'élasticité à la traction d'une part, et la direction de la sollicitation de l'autre pour le plastique verre-résine renforcé de la même façon dans les deux directions (CBAM 1:1).

Dans les calculs de la résistance il faut tenir compte de la façon correspondante de l'anisotropie des propriétés.

Il faut noter que les propriétés mécaniques des matières plastiques sont encore peu étudiées et dans ce domaine il reste encore beaucoup à faire.

Hétérogénéité des matériaux. Au § 2 nous avons introduit l'hypothèse sur l'homogénéité et l'isotropie du matériau dans les limites d'une pièce.

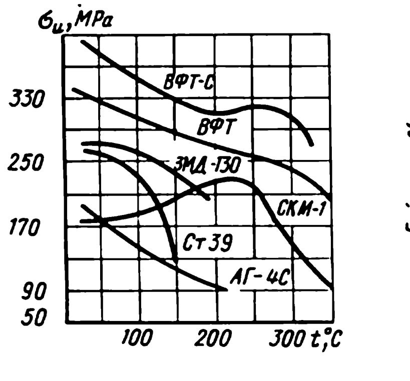


Fig. II.21

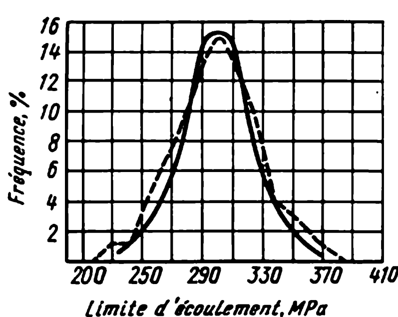


Fig. II.22

Or, dans les pièces différentes fabriquées à partir du même matériau les propriétés mécaniques et plastiques peuvent être très différentes (dispersées).

En effet, si à partir du même acier on fabrique plusieurs éprouvettes identiques, les soumet à la traction et détermine la limite d'écoulement, généralement, les résultats ne coïncident pas. La figure II.22 représente à titre d'exemple la courbe de distribution de la limite d'écoulement de l'acier à bas carbone Ст 3, dressée d'après les données sur 6000 éprouvettes. Le pointillé visualise le diagramme fréquentiel expérimental, alors que la ligne continue donne la courbe théorique (ce qu'on appelle la *distribution normale*) vers laquelle tend avec l'augmentation des essais la courbe construite d'après les données empiriques.

Cette figure montre que pour cet acier la valeur la plus fréquente de la limite d'écoulement est $\sigma_é$ = 300 MPa (15% des cas). La valeur minimale

est proche de 200 MPa et la valeur maximale, de 390 MPa. La forme de la courbe montre (pour un grand nombre d'essais) que des valeurs plus petites, tout comme des valeurs plus grandes, ne sont pas exclues.

Pour d'autres matériaux il existe également des courbes analogues.

Dans le cas des matériaux moins homogènes, par exemple, le béton, le bois, la pente des courbes est plus faible, c'est-à-dire que la dispersion des valeurs de la quantité correspondante est sensiblement plus grande.

La figure II.23, *a* représente les diagrammes fréquentiels de la charge de rupture des aciers Cт 1 à Cт 5, qui montrent que ces aciers sont moins homogènes que les autres. Cette figure rend évident le fait que les diagrammes fréquentiels des nuances différentes se chevauchent en partie, c'est-à-

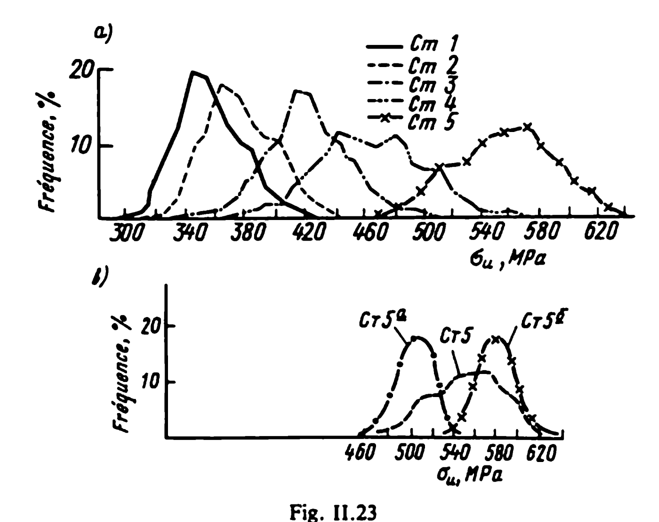


Fig. II.23

dire que les aciers des nuances différentes peuvent posséder les mêmes caractéristiques mécaniques, y compris la charge de rupture.

Par exemple, quatre nuances Cт 1, Cт 2, Cт 3, Cт 4 peuvent atteindre la charge de rupture σ_u = 400 MPa.

L'existence des courbes de distribution qui déterminent sûrement le degré d'homogénéité du matériau rend possible un calcul différencié des pièces, en adoptant pour des matériaux plus homogènes, les autres conditions étant égales, des contraintes admissibles plus élevées.

Les courbes de distribution sont à la base d'une méthode statistique nouvelle en principe de calcul des constructions (cf. § 112).

Les diagrammes fréquentiels examinés témoignent de l'existence des réserves importantes d'économie des matériaux qui peuvent être réalisées par un marquage plus soigné des aciers si le marquage s'inspire des valeurs de la résistance (aciers de destination générale, c'est-à-dire du groupe A). Si au lieu d'une nuance de l'acier, par exemple au lieu de Cт 5 pour laquelle la

dispersion de la charge de rupture va de 460 à 640 MPa (fig. II.23, *b*), on établit deux nuances, Cт 5^a et Cт 5^b, dont la dispersion de chacune sera à peu près deux fois plus faible (fig. II.23, *b*), ceci donnera une économie des matériaux parce que la contrainte admissible pour Cт 5^b peut être plus grande que la contrainte prévue pour Cт5.

§ 11. Coefficient de sécurité. Choix des contraintes admissibles

Nous savons déjà que les charges réelles appliquées à une pièce, tout comme les propriétés des matériaux dont la pièce est fabriquée, peuvent différer sensiblement de celles retenues par le calcul.

Les facteurs qui diminuent la résistance de la pièce (surcharges, hétérogénéité des matériaux, etc.) ont le plus souvent un caractère aléatoire et ne peuvent pas être pris au préalable en compte.

Les pièces et les constructions dans leur ensemble devant assurer aussi un service sans aléas dans les conditions défavorables, il faut prendre des précautions correspondantes. A cet effet, les contraintes subies par une machine ou une construction doivent être inférieures aux valeurs limites susceptibles de provoquer la rupture ou de produire des déformations plastiques. On adopte donc

$$\sigma_{adm} = \sigma_u / n_{adm}, \tag{II.17}$$

où σ_{adm} est la contrainte admissible ; n_{adm}, le *coefficient de sécurité* imposé par les normes de la conception de la construction ; σ_u, la contrainte limite (ultime) du matériau.

Sous des sollicitations statiques, dans le cas des matériaux fragiles, on prend comme contrainte limite la charge de rupture, et dans celui des matériaux plastiques, la limite d'écoulement, du fait que les contraintes égales à la limite d'écoulement provoquent des déformations plastiques importantes qui sont inadmissibles.

Ainsi, le coefficient de sécurité est introduit pour assurer le service sans aléas de l'ouvrage et de ses parties constitutives, malgré les écarts défavorables éventuels des conditions réelles par rapport à celles prévues par le calcul.

La question du coefficient de sécurité n_{adm} établi par les normes se résout compte tenu de l'expérience acquise dans le service des ouvrages et des machines. Ces derniers temps le coefficient de sécurité global n_{adm} est divisé en plusieurs *coefficients de sécurité partiels*, dont chacun montre comment intervient dans la résistance d'un élément de construction l'un quelconque des facteurs ou un groupe de facteurs. Par exemple, un coefficient reflète les écarts possibles des caractéristiques mécaniques du matériau par rapport aux données de calcul, un autre, les écarts des charges appliquées par rapport à leurs valeurs de calcul, etc.

Tableau II.4

σ_t/σ_u	0,45 à 0,55	0,55 à 0,7	0,7 à 0,9
n_2	1,2 à 1,5	1,4 à 1,8	1,7 à 2,2

Tableau II.5

Matériaux	Contraintes admissibles MPa	
	à la traction	à la compression
Fonte grise moulée :		
СЧ12—28	20 à 30	70 à 110
СЧ15—32	25 à 40	90 à 150
СЧ21—40	35 à 55	160 à 200
Acier :		
Ст0 et Ст2	140	140
Ст3	160	160
Ст3 dans les ponts	140	140
Acier au carbone en construction mécanique	60 à 250	60 à 250
Acier allié en construction mécanique	100 à 400 et plus	100 à 400 et plus
Duralumin	80 à 150	80 à 150
Laiton	70 à 140	70 à 140
Pin dans le sens des fibres	7 à 10	10 à 12
Chêne dans le sens des fibres	9 à 13	13 à 15
Maçonnerie de briques	jusqu'à 0,2	0,6 à 2,5
Béton	0,1 à 0,7	1 à 9
Textolite	15 à 30	30 à 40
Pertinax	50 à 70	50 à 70

Cette partition du coefficient de sécurité global permet de tenir compte de la diversité des conditions de service concrètes des pièces des machines et des ouvrages et les concevoir en assurant une meilleure fiabilité et un service économique.

Le coefficient de sécurité s'écrit sous la forme de produit

$$n = n_1 n_2 n_3 \ldots \qquad \text{(II.18)}$$

La question des coefficients de sécurité partiels n'est pas uniformisée jusqu'à présent. Leur valeur est adoptée d'habitude en se guidant par l'expérience de la conception et de l'exploitation des machines du type défini. Actuellement, en construction mécanique il existe des recommandations sur l'utilisation d'un, de trois, de cinq et même de dix coefficients de

sécurité partiels. «L'Aide-mémoire de l'ingénieur de construction mécanique» propose trois coefficients de sécurité suivants :

$$n = n_1 n_2 n_3, \qquad (II.19)$$

où n_1 rend compte de l'imprécision des données des charges et des contraintes. Dans le cas d'une précision élevée de la détermination des contraintes en service on peut le retenir entre 1,2 et 1,5 ; lorsque la précision de calcul est plus faible, on le prend égal à 2 ou 3 ; n_2 rend compte de l'hétérogénéité du matériau, de sa susceptibilité aux défauts d'usinage. Pour le calcul d'après la limite d'écoulement sous l'action des charges statiques, le coefficient n_2 peut être choisi d'après le tableau II.4 (sans tenir compte des dimensions absolues) en fonction du quotient de la limite d'écoulement par la charge de rupture.

En calculant la charge de rupture on adopte : a) pour les matériaux peu plastiques et fragiles (aciers à haute résistance à revenu à basse température) $n_2 = 2$ à 3 ; b) pour les matériaux fragiles $n_2 = 3$ à 4 ; c) pour les matériaux très fragiles, $n_2 = 4$ à 6. Pour le calcul à la fatigue (cf. chapitre XII) le coefficient n_2 est pris égal à 1,5 ou 2,0, en le poussant dans le cas des matériaux à faible hétérogénéité (surtout la fonderie) et des pièces de grandes dimensions jusqu'à 3 et plus ; n_3 est le coefficient des conditions de service, qui rend compte de la responsabilité des pièces et qui vaut de 1 à 1,5.

Le tableau II.5 donne les valeurs approchées des contraintes admissibles dans le cas des sollicitations statiques de certains matériaux.

§ 12. Problèmes types de calcul à la résistance des barres étendues (comprimées)

Après avoir calculé la contrainte dans la section dangereuse de la barre étendue (comprimée) d'après la formule [II.2] et établi la contrainte admissible conformément aux considérations qui précèdent, on peut évaluer la résistance de la barre.

A cet effet, il faut comparer les contraintes réelles sollicitant la section dangereuse avec les contraintes admissibles

$$\sigma = N/A \leqslant \sigma_{adm}. \qquad \textbf{[II.20]}$$

Il s'agit ici de la contrainte admissible soit à la traction, soit à la compression, suivant le cas envisagé.

L'inégalité [II.20] s'appelle *condition de résistance à la traction (compression)*.

En appliquant cette condition, on peut résoudre les problèmes suivants :

1. *Vérifier la barre à la résistance*, c'est-à-dire calculer d'après la charge et les dimensions de la section droite les contraintes réelles σ_{abs} et les

comparer avec les contraintes admissibles. L'écart réel ne doit pas dépasser ± 5 %. Une surcharge plus forte est inadmissible du point de vue de la résistance, alors qu'une sous-charge témoigne de la consommation excessive du matériau. Le coefficient de sécurité réel est défini comme le quotient $n = \sigma_é / \sigma_{abs}$ pour des matériaux plastiques ou $n = \sigma_u / \sigma_{abs}$ pour des matériaux fragiles.

2. *Calculer* d'après la charge connue et la contrainte admissible la *section droite* nécessaire pour assurer la résistance de la barre

$$A \geqslant N/\sigma_{adm}. \qquad \text{[II.21]}$$

3. *Calculer l'effort normal admissible* d'après les dimensions données de la section droite et la contrainte admissible connue :

$$N_{adm} \leqslant A\sigma_{adm}. \qquad \text{[II.22]}$$

Après avoir déterminé l'effort normal et établi la relation entre ce dernier et la charge (par la méthode des sections), on peut calculer la charge admissible.

Il convient de retenir qu'après le calcul de la résistance de la section la plus faible, les barres comprimées doivent être vérifiées *à la stabilité* pour parer au flambement éventuel qui peut apparaître dans le cas d'une valeur définie de la force de compression (cf. chapitre X).

Exemple II.3. Calculer la charge admissible de la tôle d'acier soumise à la traction, affaiblie par les trous de $d = 20$ mm (fig. II.24). Contrainte admissible $\sigma_{adm} = 160$ MPa ; épaisseur de la tôle $t = 10$ mm ; sa largeur $b = 200$ mm.

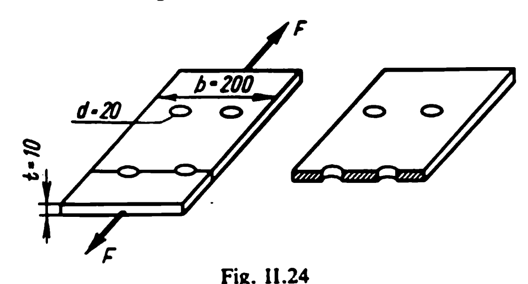


Fig. II.24

Solution. Déterminons la charge admissible par calcul à la résistance suivant la section affaiblie par les trous, la rupture pouvant se produire avant tout en cet endroit. L'aire totale de la section de la tôle

$$A_{br} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ cm}^2.$$

L'aire de deux trous qui affaiblissent la section : $\Delta A = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ cm². L'aire active de la section

$$A_{nt} = A_{br} - \Delta A = 20 - 4 = 16 \text{ cm}^2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{m}^2.$$

La charge admissible

$$F_{adm} = A_{nt}\sigma_{adm} = 16 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 256 \cdot 10^3 = 256 \text{ kN}.$$

Exemple II.4. Sélectionner la section des éléments du système représenté sur la figure II.25 et calculer le déplacement du nœud B. Matériau : acier Cт 3 ; $\sigma_{adm} = 160$ MPa.

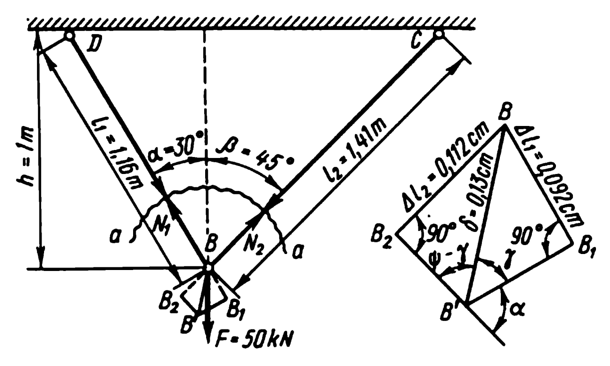


Fig. II.25

Solution. Calculons par la méthode des sections les efforts sollicitant les barres, en considérant la partie du système au-dessous de la section $a—a$:

$$\sum X = 0 ; \quad -N_1 \sin 30° + N_2 \sin 45° = 0,$$

$$\text{d'où} \quad N_1 = N_2\sqrt{2};$$

$$\sum Y = 0 ; \quad N_1 \cos 30° + N_2 \cos 45° - 50 = 0.$$

En résolvant deux équations à deux inconnues, on trouve

$$N_1 = 0{,}0368 \text{ MN et } N_2 = 0{,}026 \text{ MN}.$$

Les deux efforts sollicitent à la traction. Choisissons la section des éléments :

$$A_1 = N_1/\sigma_{adm} = 0{,}0368/160 = 0{,}00023 \text{m}^2 = 2{,}3 \text{ cm}^2;$$

$$A_2 = N_2/\sigma_{adm} = 0{,}026/160 = 0{,}000162 \text{ m}^2 = 1{,}62 \text{ cm}^2.$$

Déterminons le déplacement du nœud B. Cherchons d'abord l'allongement des barres

$$\Delta l = N_1 l_1/(EA_1) = 0{,}0368 \cdot 1{,}16/(2 \cdot 10^5 \cdot 2{,}30 \cdot 10^{-4}) = 0{,}00092 \text{ m} = 0{,}092 \text{ cm} ;$$

$$\Delta l_2 = 0{,}026 \cdot 1{,}41/(2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}62 \cdot 10^{-4}) = 0{,}00112 \text{ m} = 0{,}112 \text{ cm}.$$

Pour déterminer le déplacement du nœud B, appliquons la méthode graphique. Menons à partir des points D et C des arcs de rayons égaux aux nouvelles longueurs des tiges DB et BC (compte tenu des allongements). Ils se coupent en B', la nouvelle position de l'articulation B. Les déformations étant faibles, les arcs peuvent être remplacés par les droites B_2B' et B_1B' perpendiculaires aux directions de BC et DB. Pour obtenir une solution plus précise, la cons-

truction (le diagramme des déplacements) doit se faire à une grande échelle (fig. II.25). Alors, à l'échelle retenue, le segment BB' détermine le déplacement du nœud B.

Dans notre cas, il vaut $\delta = 0{,}13$ cm.

§ 13. Contraintes sollicitant les sections obliques à la traction (compression) dans une direction

Pour juger de la résistance totale du matériau, il faut savoir calculer les contraintes qui interviennent dans une section oblique quelconque d'une barre étendue ou comprimée (fig. II.26, *a*). Les contraintes normales σ

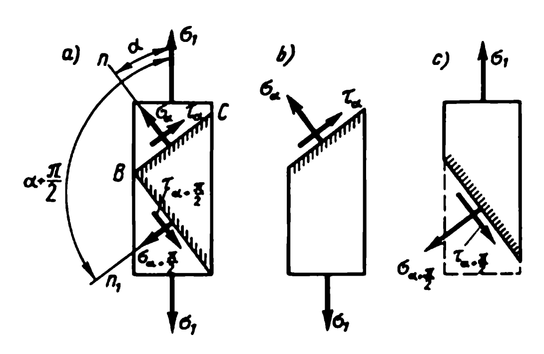


Fig. II.26

dans la section droite de la barre sont considérées comme connues (par exemple, $\sigma_1 = N/A$).

Calculons les contraintes apparues dans la section oblique BC dont la normale fait un angle α avec la direction de σ_1. Adoptons que la direction positive des lectures de l'angle α est antihoraire.

Introduisons les notations: A, l'aire de la section perpendiculaire à l'axe de la barre ; A_α, l'aire de la section oblique ; de plus,

$$A_\alpha = A/\cos\alpha. \qquad \text{(II.23)}$$

Dans le cas général la section oblique peut subir aussi bien des contraintes normales σ_α, que des contraintes tangentielles τ_α. Leurs valeurs se trouvent d'après la condition d'équilibre de la partie rejetée, par exemple, de la partie inférieure (fig. II.26, *b*). Projetons les forces sur la direction de σ_α:

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos\alpha = 0.$$

En utilisant la relation (II.23), trouvons

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha. \qquad \text{[II.24]}$$

Projetons les forces sur la direction de τ_α pour obtenir

$$\tau_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \sin \alpha = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \tau_\alpha = 0{,}5\sigma_1 \sin 2\alpha. \qquad \textbf{[II.25]}$$

Lorsque la valeur de σ est positive (traction) et $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$, la valeur obtenue de τ_α est positive. Ceci signifie que la contrainte tangentielle est dirigée suivant la figure II.26, *b*.

Cette direction de la contrainte tangentielle est caractérisée par le fait que pour se confondre avec celle-ci la normale extérieure *n* à l'aire doit être tournée dans le sens horaire. Les contraintes tangentielles de cette direction sont d'après l'usage considérées comme positives*.

Mais si pour se confondre avec la contrainte tangentielle la normale à l'aire doit être tournée dans le sens antihoraire, cette contrainte est envisagée comme négative (fig. II.26, *c*).

La formule [II.24] implique que les contraintes normales deviennent maximales lorsque $\alpha = 0$, c'est-à-dire dans la section perpendiculaire à l'axe de la barre.

D'après la formule [II.25], avec $\alpha = 0$, la contrainte tangentielle s'annule. Les formules [II.24] et [II.25] montrent que pour $\alpha = 90°$, $\sigma = 0$ et $\tau = 0$.

De la sorte, dans les sections longitudinales on n'observe ni contraintes normales, ni contraintes tangentielles.

Comme nous l'avons déjà dit (cf. § 6), les aires non soumises aux contraintes tangentielles se nomment principales, et les contraintes normales qui interviennent dans les aires principales s'appellent contraintes principales. Par conséquent, une contrainte normale qui se manifeste dans la section droite d'une barre étendue ou comprimée est une contrainte principale. Elle est donc notée σ_1, puisque les indices 1, 2, 3 sont affectés d'habitude aux contraintes principales (cf. § 6).

Etant donné que dans le cas considéré il n'y a qu'une seule contrainte principale différente de zéro, l'état de contrainte envisagé est donc uniaxial.

La formule [II.25] montre également que la contrainte tangentielle maximale se manifeste dans la section sous un angle $\alpha = 45°$; elle vaut donc la moitié de la contrainte principale :

$$\tau_{max} = \sigma_1/2. \qquad \text{(II.26)}$$

C'est dans ces sections précisément que s'amorcent les déplacements des cristaux, le témoignage en étant fourni par les lignes de Lüders-Tchernov (cf. dans ce qui précède).

---

* Dans la théorie de l'élasticité la règle des signes des contraintes tangentielles est différente.

§ 14. Loi de parité des contraintes tangentielles

Déterminons les contraintes normales et tangentielles qui interviennent dans deux aires réciproquement perpendiculaires.

Pour une aire inclinée sous un angle α on a, d'après les formules [II.24] et [II.25],

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \qquad \tau_\alpha = 0{,}5\sigma_1 \sin 2\alpha.$$

Pour les aires réciproquement perpendiculaires, lorsque l'angle est égal à $\alpha + \pi/2$, les contraintes normales et tangentielles peuvent être déterminées soit directement à partir de la condition d'équilibre de la partie supérieure ou inférieure de la barre (fig. II.26, *c*), soit d'après les formules [II.24] ou [II.25], en remplaçant α par $\alpha + \pi/2$.

En appliquant les formules [II.24] et [II.25], on obtient

$$\sigma_{\alpha + \pi/2} = \sigma_1 \cos^2(\alpha + \pi/2) = \sigma_1 \sin^2\alpha, \qquad \text{(II.27)}$$

$$\tau_{\alpha + \pi/2} = 0{,}5\sigma_1 \sin 2(\alpha + \pi/2) = -0{,}5\sigma_1 \sin 2\alpha. \qquad \text{(II.28)}$$

L'analyse des résultats obtenus montre que, premièrement,

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \pi/2} = \sigma_1,$$

c'est-à-dire que *la somme des contraintes normales par rapport à deux aires réciproquement perpendiculaires est constante et égale à la contrainte principale* ; deuxièmement,

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha + \pi/2}, \qquad \text{(II.29)}$$

c'est-à-dire que *deux aires réciproquement perpendiculaires subissent des contraintes tangentielles égales en valeur et de signe opposé (loi de parité ou de réciprocité des contraintes tangentielles).* Dans ces conditions, les contraintes tangentielles intervenant dans deux aires réciproquement perpendiculaires sont dirigées les deux soit vers l'arête d'intersection des aires, soit à partir de cette arête, suivant la figure II.26, *a*.

Par exemple, si on change le signe de σ, les contraintes τ_α et $\tau_{\alpha + \pi/2}$ changent leur direction pour une direction opposée et pour être orientées les deux vers l'arête B de l'intersection des aires.

La loi de parité (de réciprocité) des contraintes tangentielles est valable aussi bien pour l'état uniaxial, que pour n'importe quel autre état qu'il soit biaxial ou volumique.

§ 15. Calcul des contraintes intervenant dans les sections obliques soumises à la traction (compression) dans deux directions

Considérons le cas plus général de l'état de contrainte plan (biaxial) lorsque deux contraintes principales σ_1 et σ_2 sont différentes de zéro (fig. II.27, *a*).

Comme nous l'avons déjà dit au § 6, les indices sont affectés aux symboles des contraintes principales de façon à respecter l'inégalité $\sigma_1 > \sigma_2$. L'angle positif α entre la direction de σ_1 et la normale à une aire arbitraire est compté dans le sens antihoraire. L'angle entre la direction de la contrainte σ_2 et l'aire est $\alpha + \pi/2$.

Dans une section oblique arbitraire les contraintes σ_α et τ_α peuvent être déterminées soit à partir des conditions d'équilibre d'un prisme triangulaire *ABC* (fig. II.27, *b*), soit d'après les formules [II.24] et [II.25], en sommant

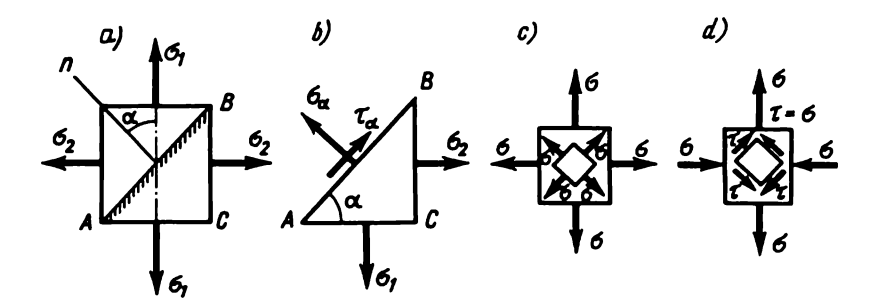


Fig. II.27

les contraintes dues à l'action de σ_1 avec les contraintes dues à l'action de σ_2 (en remplaçant l'angle α par $\alpha + \pi/2$).

Il en résulte

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2(\alpha + \pi/2), \text{ d'où } \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha. \quad \text{(II.30)}$$

Ensuite,

$$\tau_\alpha = 0{,}5\sigma_1 \sin 2\alpha + 0{,}5\sigma_2 \sin 2(\alpha + \pi/2),$$

$$\text{d'où } \tau_\alpha = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha. \quad \text{(II.31)}$$

La formule (II.31) montre que les contraintes tangentielles maximales sont égales à la demi-différence des contraintes principales

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad \text{(II.32)}$$

et se manifestent dans les sections inclinées sous le même angle aux directions de σ_1 et σ_2, c'est-à-dire avec $\alpha = 45°$. Ceci résulte de la condition que τ_{max} a lieu avec $\sin 2\alpha = 1$.

Après avoir déterminé les contraintes tangentielles sur l'aire perpendiculaire à l'aire AB, vérifions que la loi de parité des contraintes tangentielles est également valable pour l'état de contrainte biaxial. Ceci peut être également prouvé en appliquant la formule (II.31) pour calculer les valeurs de τ_α et $\tau_{\alpha + 90°}$.

Cas particuliers. *1-er cas.* Considérons l'état de contrainte lorsque $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (fig. II.27, *c*).

Dans ce cas sur toutes les aires qui passent par le point étudié, la contrainte tangentielle τ_α est nulle et la contrainte normale a la même valeur $\sigma_\alpha = \sigma$ [cf. les formules (II.30) et (II.31)]. Cet état de contrainte s'appelle *traction (compression) biaxiale uniforme.*

2-e cas. Considérons l'état de contrainte visualisé sur la fig. II.27, *d* caractérisé par les contraintes principales $\sigma_1 = \sigma$ et $\sigma_3 = -\sigma$. Alors, $\sigma_2 = 0$. Calculons les contraintes dans les sections de même inclinaison par rapport aux directions de σ_1 et σ_3, c'est-à-dire pour $\alpha = 45°$ et $\alpha = 135°$.

D'après les formules (II.30) et (II.31), on obtient que $\sigma_\alpha = 0$ et $\tau_\alpha = \pm\sigma$. Cet état de contrainte s'appelle *cisaillement pur.*

§ 16. Définition des contraintes principales et des positions des aires principales

Considérons le problème inverse. On donne les contraintes normales et tangentielles qui agissent suivant les faces de l'élément (fig. II.28, *a*). Il faut déterminer la position des aires principales et les valeurs des contrain-

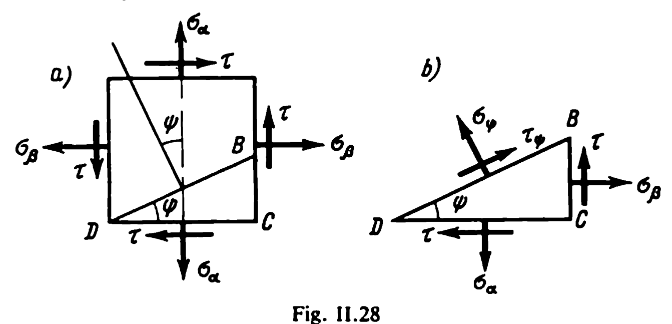


Fig. II.28

tes principales. Considérons l'équilibre du prisme triangulaire à base *DBC* (fig. II.28, *b*). Admettons que $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$. Comptons l'angle ψ à partir de la direction de la plus grande contrainte jusqu'à la normale à l'aire. Retenons comme direction positive du comptage de l'angle ψ celle dans le sens antihoraire. Désignons par dA l'aire de la face inclinée. Alors l'aire de la face verticale est dA sin ψ, et de la face horizontale, dA cos ψ.

En projetant toutes les forces sur la direction de σ_ψ, on obtient : $\sigma_\psi\,dA - (\sigma_\alpha dA \cos\psi)\cos\psi + (\tau\,dA\cos\psi)\sin\psi + (\tau\,dA\sin\psi)\cos\psi - (\sigma_\beta\,dA\sin\psi)\sin\psi = 0$. En projetant maintenant toutes les forces sur la direction de τ_ψ : $\tau_\psi\,dA - (\sigma_\alpha\,dA\cos\psi)\sin\psi - (\tau\,dA\cos\psi)\cos\psi + (\tau\,dA\sin\psi)\sin\psi + (\sigma_\beta\,dA\sin\psi)\cos\psi = 0$.

En réduisant par dA et en introduisant les fonctions des angles doubles, on obtient

$$\sigma_\psi = \sigma_\alpha\cos^2\psi + \sigma_\beta\sin^2\psi - \tau\sin 2\psi, \tag{II.33}$$

$$\tau_\psi = 0{,}5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)\sin 2\psi + \tau\cos 2\psi. \tag{II.34}$$

Avec la variation de l'angle d'inclinaison de l'aire ψ la grandeur σ_ψ change en permanence.

Pour établir les positions des aires principales, c'est-à-dire sollicitées par les contraintes normales extrémales, il faut soit annuler la dérivée $d\sigma_\psi/d\psi$, soit annuler les contraintes tangentielles τ_ψ, ces dernières ne se manifestant pas dans les aires principales.

Dans les deux cas, pour le calcul de *l'angle ψ_0 de l'inclinaison des aires principales* on obtient la relation suivante :

$$0{,}5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)\sin 2\psi_0 + \tau\cos 2\,\psi_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{tg}\,2\,\psi_0 = 2\tau/(\sigma_\beta - \sigma_\alpha). \qquad \text{[II.35]}$$

Pour obtenir les valeurs extrémales des contraintes normales, c'est-à-dire des contraintes principales, portons la valeur de l'angle de la formule [II.35] dans la formule (II.33). Exprimons d'abord les fonctions trigonométriques de (II.33) à l'aide de la tangente de l'angle double. A cet effet, on utilise les formules de trigonométrie connues:

$$\sin 2\psi_0 = \pm\frac{\mathrm{tg}\,2\psi_0}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\psi_0}};$$

$$\cos 2\,\psi_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\psi_0}};$$

$$\cos^2\psi_0 = 0{,}5(1 + \cos 2\psi_0)\,; \qquad \sin^2\psi_0 = 0{,}5(1 - \cos^2\psi_0).$$

Après des transformations élémentaires on obtient la *formule des contraintes principales:*

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = 0{,}5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm 0{,}5\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2}. \tag{II.36}$$

Si l'une des contraintes normales est nulle, la formule (II.36) devient plus simple :

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = 0{,}5\sigma \pm 0{,}5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad \text{[II.37]}$$

Dans ce qui suit nous utiliserons cette formule pour l'étude de la flexion et de la résistance composée.

En analysant la dérivée seconde $d^2\sigma_\psi/d\psi^2$, on peut voir que sous les conditions adoptées ($\sigma_\alpha > \sigma_\beta$) l'aire principale subit sous un angle ψ_0 la contrainte principale maximale, et l'aire sous un angle $\psi_0 + 90°$, la contrainte principale minimale. D'une façon analogue, on peut trouver les valeurs extrémales des contraintes tangentielles en annulant la dérivée $d\tau_\psi/d\psi = 0$. On en tire

$$\tau_{\substack{max \\ min}} = \pm 0{,}5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad \text{[II.37a]}$$

Exemple II.5. Etablir la valeur et la direction des contraintes principales dans le cas de l'état de contrainte visualisé sur la figure II.29.

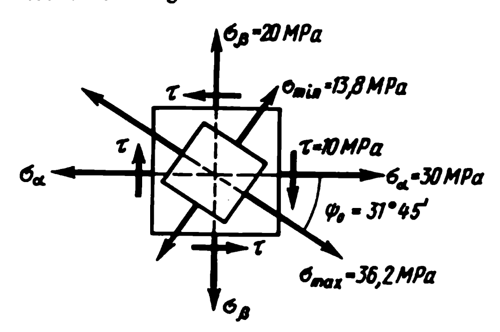


Fig. II.29

Solution. Calculons d'après la formule [II.35] la position des aires principales perpendiculaires au plan du dessin

$$\text{tg}\, 2\psi_0 = \frac{2 \cdot 100}{200 - 300} = -2\,;$$

$$2\psi_0 = -63°30'\,;$$

$$\psi_0 = -31°45'.$$

Le signe moins indique que ψ_0 se compte à partir de la direction de $\sigma_\alpha = 30$ MPa dans le sens horaire.

D'après la formule (II.36), on obtient

$$\sigma_{max} = \frac{30 + 20}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(30 - 20)^2 + 4 \cdot 10^2} = 25 + 11{,}2 = 36{,}2\,\text{MPa}\,;$$

$$\sigma_{min} = 25 - 11{,}2 = 13{,}8\ \text{MPa}.$$

En vertu de ce qui est dit plus haut, σ_{max} intervient dans l'aire sous un angle ψ_0, et σ_{min}, dans l'aire sous un angle $\psi_0 + 90°$.

Exemple II.6. Qu'est-ce qui changerait dans l'exemple précédent si les contraintes tangentielles étaient dirigées dans le sens opposé ?

Réponse. La contrainte tangentielle τ devenant négative, c'est le signe de l'angle d'inclinaison des aires principales qui change : $\psi_0 = 31°45'$ (il est compté dans le sens antihoraire). Les valeurs des contraintes principales ne changent pas.

§ 17. Relation entre les déformations et les contraintes aux états de contrainte plan et volumique (loi de Hooke généralisée)

Déterminons à l'état de contrainte plan les déformations ε_1 et ε_2 dans le sens des contraintes principales (fig. II.30). A cet effet utilisons la loi de Hooke pour l'état de contrainte uniaxial (cf. la formule (II.31)), ainsi que la relation (II.5) entre les déformations longitudinale et transversale, et le

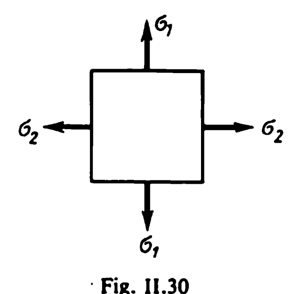


Fig. II.30

principe de l'indépendance de l'effet des forces (principe de la composition des déformations).

L'allongement relatif suivant la verticale, produit par l'action d'une seule contrainte σ_1, est

$$\varepsilon_{11} = \sigma_1/E,$$

en même temps le rétrécissement relatif dans le sens horizontal s'écrit

$$\varepsilon_{21} = \nu\sigma_1/E.$$

L'application de la seule σ_2 produirait dans le sens horizontal l'allongement $\varepsilon_{22} = \sigma_2/E$, et dans le sens vertical, le rétrécissement $\varepsilon_{12} = \nu\sigma_2/E$.

En additionnant les déformations, il vient

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \sigma_1/E - \nu\sigma_2/E. \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} = \sigma_2/E - \nu\sigma_1/E. \end{aligned}\right\} \quad \text{[II.38]}$$

Ces formules traduisent la loi de Hooke généralisée pour l'état de contrainte plan.

Si l'on connaît les déformations ε_1 et ε_2, en résolvant les équations [II.38] par rapport aux contraintes σ_1 et σ_2, on obtient les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= E(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)/(1 - \nu^2),\\ \sigma_2 &= E(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)/(1 - \nu^2).\end{aligned}\right\} \qquad \text{[II.39]}$$

D'une façon analogue, pour l'état de contrainte volumique (spatial) lorsque toutes les trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 sont différentes de zéro, on a

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)],\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)],\\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\right\} \qquad \text{[II.40]}$$

Les équations [II.40] traduisent la loi de Hooke généralisée de l'état de contrainte volumique. Les déformations ε_1, ε_2 et ε_3 dans la direction des contraintes principales s'appellent *déformations principales*.

La connaissance de ces déformations permet de calculer la variation du volume sous la déformation. Prenons un cube de $1 \times 1 \times 1$ cm. Avant la déformation son volume $V_0 = 1$ cm^3; après la déformation il devient : $V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (les produits de ε sont négligeables comme quantités petites devant ε eux-mêmes).

La variation relative du volume

$$\upsilon = (V_1 - V_0)/V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad \text{[II.41]}$$

En y portant les valeurs de ε_1, ε_2, ε_3 tirées des équations [II.40], on obtient

$$\upsilon = (1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/E. \qquad \text{[II.42]}$$

La formule [II.42] entraîne que le coefficient de Poisson ν ne peut être supérieur à 0,5. En effet, il est évident que la traction triaxiale ne peut pas diminuer le volume de l'élément car υ est positif ; or, ceci n'est possible que si $1 - 2\nu \geqslant 0$, du fait que dans ce cas les contraintes principales sont positives ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 > 0$).

Les formules [II.38] à [II.42] expriment la relation non seulement entre les déformations principales et les contraintes, mais encore entre les valeurs

quelconques de ces quantités (non principales), c'est-à-dire qu'elles restent valables lorsque les aires subissent également des contraintes tangentielles.

Ceci résulte du fait que les déformations linéaires (dans les directions perpendiculaires à τ) ne dépendent pas des contraintes tangentielles.

Exemple II.7. Déterminer les contraintes σ_x et σ_y si les déformations dans leurs directions sont $\varepsilon_x = 0{,}001$; $\varepsilon_y = -0{,}0008$; le module d'élasticité $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; le coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$.

Solution. D'après la formule [II.39] on a

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0{,}3^2}(0{,}001 - 0{,}3 \cdot 0{,}0008) = 167{,}0 \text{ MPa} ;$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^3}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0{,}3^2}(-0{,}0008 + 0{,}3 \cdot 0{,}0001) = -110{,}0 \text{ MPa}.$$

Exemple II.8. Un cube de caoutchouc *ABCD* est placé sans serrage mais aussi sans jeu dans une enceinte en acier de façon que ses deux faces opposées soient libres (fig. II.31). Le

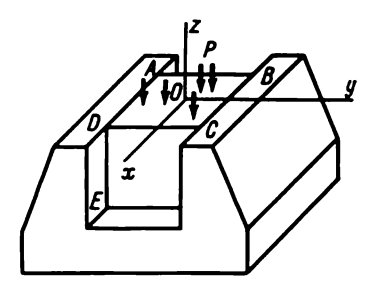


Fig. II.31

cube est soumis d'en haut à la pression p. Calculer la contrainte σ_y, les déformations ε_x et ε_z, ainsi que la variation relative du volume. Le module d'élasticité du caoutchouc est E, le coefficient de Poisson, ν. Le frottement entre le cube et les parois est négligé. L'enceinte en acier est considérée comme parfaitement rigide (indéformable).

Solution. D'après la loi de Hooke géneralisée on a

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E,$$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E,$$

$$\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E.$$

Par condition : $\sigma_x = 0$; $\sigma_z = -p$; $\varepsilon_y = 0$. En appliquant ces conditions, il vient

$$\sigma_y = -\nu p ; \qquad \varepsilon_x = \nu(\nu + 1)p/E ;$$

$$\varepsilon_z = -(1 + \nu^2)p/E ;$$

$$v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -(1 - 2\nu)(1 + \nu)p/E.$$

§ 18. Travail à la traction (à la compression) des forces extérieures et intérieures. Energie potentielle de déformation

En traction (en compression) les forces extérieures réalisent un travail par suite du déplacement des points de leur application (fig. II.32, *a*).

Calculons le travail de l'application statique d'une force extérieure, c'est-à-dire d'une force qui au cours de la déformation croît à une vitesse très faible de zéro à sa valeur terminale

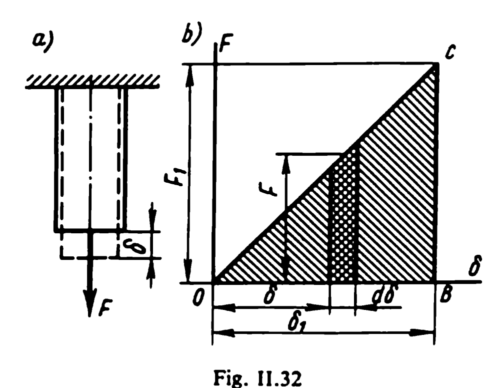


Fig. II.32

Le travail élémentaire dW d'une force extérieure F pendant le déplacement dδ est

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}\delta. \tag{II.43}$$

Mais δ et F sont liés par la relation $\delta = Fl/(EA)$ (loi de Hooke) d'où $F = EA\,\delta/l$.

En portant cette valeur dans la formule (II.43), on obtient

$$\mathrm{d}W = EA\delta\mathrm{d}\delta/l.$$

Le travail total de la force est donné par l'intégration de cette expression de zéro à la valeur terminale du déplacement δ_1 :

$$W = \frac{EA}{l}\int_0^{\delta_1} \delta\,\mathrm{d}\delta = \frac{EA\delta_1^2}{2l} = \frac{F_1\delta_1}{2}.$$

Ainsi,

$$W = 0{,}5F_1\delta_1, \tag{II.44}$$

c'est-à-dire que *le travail d'une force extérieure appliquée suivant une allure statique est égal à la moitié du produit de la valeur terminale de la force par la valeur terminale du déplacement correspondant.*

Graphiquement, le travail de la force F s'exprime, compte tenu de l'échelle, par l'aire *OCB* du diagramme dressé en coordonnées $\delta - F$ (fig. II.32, *b*).

Notons que suivant le déplacement δ_1 le travail de la force F_1 invariable en valeur est égal à

$$W = F_1\delta_1,$$

c'est-à-dire qu'il est deux fois plus grand que dans le cas de l'action statique.

Au cours de la déformation le travail est réalisé non seulement par les forces extérieures, mais aussi par les forces intérieures (celles de l'élasticité).

En traction (compression) le travail des forces extérieures se calcule de la façon suivante.

La figure II.33 représente l'élément dz de la barre sollicité par des contraintes normales σ qui pour cet élément sont des forces extérieures. Il est clair que les forces intérieures sont dirigées du côté opposé au déplacement.

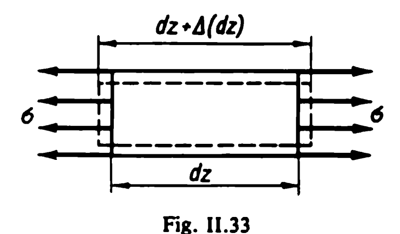


Fig. II.33

C'est pourquoi *sous la charge le travail des forces intérieures est toujours négatif.*

Le travail élémentaire des forces intérieures (pour l'élément dz) se calcule d'après la formule analogue à [II.44] :

$$dW_i = -0{,}5N\Delta(dz), \qquad \text{(II.45)}$$

où N est l'effort intérieur (effort normal) ; $\Delta(dz)$, l'allongement de l'élément.

Mais, d'après la loi de Hooke, $\Delta(dz) = N dz/(EA)$. Donc,

$$dW_i = -N^2\,dz/(2EA). \qquad \text{(II.46)}$$

Le travail total des forces intérieures s'obtient en intégrant les deux membres de (II.46) par rapport à la longueur l de toute la barre :

$$W_i = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2 dz}{EA}. \qquad \text{(II.47)}$$

Si N, E et A sont constants, il vient

$$W_i = -N^2 l/(2EA) = -EA\,\Delta l^2/(2l), \qquad \text{(II.48)}$$

où $\Delta l = \delta = Nl/(EA)$ est l'allongement de la barre.

La quantité *égale au travail des forces intérieures mais affectée d'un signe opposé* s'appelle ***énergie potentielle de déformation.*** C'est l'énergie accumulée par le corps pendant la déformation.

Ainsi, pour une barre de section constante, lorsque la valeur de l'effort normal est la même dans toutes les sections droites, l'énergie potentielle en traction (en compression) se calcule d'après la formule

$$U = -W_i = N^2 l/(2EA) = EA\Delta l^2/(2l). \qquad \textbf{[II.49]}$$

L'énergie potentielle rapportée à l'unité de volume du matériau s'appelle *énergie potentielle spécifique* :

$$u = U/V = U(Al) = -N^2 l/(2EA^2 l) = \sigma^2/(2E), \qquad (II.50)$$

ou $u = E\varepsilon^2/2$ (étant donné que $\sigma = E\varepsilon$), ou encore $u = \sigma\varepsilon/2$. (II.51)

A l'état de contrainte volumique l'énergie potentielle spécifique s'obtient comme la somme de trois termes :

$$u = (\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)/2. \qquad (II.52)$$

La loi de Hooke généralisée permet de tirer

$$u = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]/(2E). \qquad \textbf{[II.53]}$$

En annulant l'une des contraintes principales, il est facile d'obtenir à partir de cette formule comme cas particulier la formule de l'état de contrainte plan.

§ 19. Propriétés de l'énergie mécanique

Voici deux propriétés de l'énergie mécanique largement appliquées par les méthodes modernes de calcul des constructions quelles que soient les déformations, que ce soit la traction, la torsion, la flexion, etc.*.

Loi de conservation de l'énergie mécanique. La transformation de l'énergie des forces extérieures en énergie des forces intérieures et inversement vérifie la loi de la conservation de l'énergie qui peut être énoncée comme suit : *lorsque sous l'action d'une charge quelconque un corps (un système) élastique passe de l'état non déformé à l'état d'équilibre déformé, le travail global fourni par les forces extérieures et intérieures est nul :*

$$W + W_i = 0, \qquad \textbf{[II.54]}$$

où W est le travail des forces extérieures (positif lors de l'application de la charge); W_i, le travail des forces intérieures (négatif lors de l'application de la charge). Compte tenu que $W_i = -U$, l'équation [II.54] peut être rem-

* La démonstration de ces théorèmes est donnée par les cours relatifs à la théorie de l'élasticité et à la mécanique des constructions.

placée par l'égalité

$$W = U, \qquad (II.55)$$

où U est l'énergie potentielle de déformation.

Cette loi reste en vigueur dans le cas d'une sollicitation lente (statique) et dans celui des déformations élastiques.

Lorsque la sollicitation prend une allure dynamique et lorsqu'apparaissent des déformations plastiques une partie de l'énergie des forces intérieures se transforme en énergie du déplacement du corps, en énergie électromagnétique, thermique ou en d'autres formes d'énergie.

La loi de la conservation de l'énergie fournit une équation dont l'utilisation permet de calculer une inconnue, par exemple, le déplacement dans le sens de la force extérieure ou l'effort inconnu dans l'une des barres.

Exemple II.9. En appliquant cette loi déterminer le déplacement vertical du nœud B (cf. fig. II.25).

Solution. Le travail de la force extérieure F

$$W = F\delta_B/2,$$

où δ_B est le déplacement vertical pour le moment inconnu du nœud B.

L'énergie potentielle de la déformation des barres DB et BC est

$$U = (N_1^2 l_1/A_1 + N_2^2 l_2/A_2)(2E).$$

En vigueur de la loi de la conservation de l'énergie, on a

$$F\delta_B/2 = (N_1^2 l_1/A_1 + N_2^2 l_2/A_2)/(2E).$$

En y portant les quantités connues $F = 50$ kN ; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa ; $N_1 = 36{,}8$ kN; $N_2 = 26{,}0$ kN; $l_1 = 116$ cm ; $l_2 = 141$ cm ; $A_1 = 2{,}30\ \text{cm}^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$; $A_2 = 1{,}62 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$, on obtient $\delta_B = 0{,}124$ cm.

Loi du minimum de l'énergie potentielle de déformation (principe de la moindre action). Dans le calcul des constructions on applique largement la loi énergétique suivante appelée *principe de la moindre action : l'état de contrainte d'équilibre réel d'un corps (système) élastique se distingue de tous les états d'équilibre connexes par le fait qu'il assure le minimum de l'énergie potentielle de déformation.*

Aussi, si l'énergie potentielle de déformation dépend des quantités inconnues, par exemple des efforts X_1, X_2, etc., on peut calculer ces inconnues à partir des conditions du minimum d'énergie :

$$\partial U/\partial X_1 = 0; \quad \partial U/\partial X_2 = 0; \ldots \qquad \textbf{[II.56]}$$

Le principe de la moindre action est justifié pour des corps et systèmes élastiques linéairement déformables, c'est-à-dire observant la loi de Hooke. Il met à notre disposition n'importe quel nombre d'équations, et notamment d'équations linéaires nécessaires pour déterminer les inconnues.

Au paragraphe suivant nous montrons l'application de ce principe au calcul des systèmes hyperstatiques les plus simples.

Les autres propriétés de l'énergie mécanique sont décrites dans les paragraphes correspondants du cours.

§ 20. Problèmes hyperstatiques en traction et compression

Dans de nombreuses constructions il existe des éléments sollicités par des efforts qui ne peuvent pas être déterminés seulement à l'aide des équations d'équilibre. Ces constructions (structures) sont dites *hyperstatiques*.

Considérons, par exemple, la barre de la figure II.34. La charge F est supportée en partie par l'encastrement supérieur et en partie par l'encastrement inférieur. Pour calculer les deux réactions des encastrements on ne peut utiliser qu'une équation d'équilibre : l'égalité à zéro de la somme des projections de toutes les forces sur l'axe vertical. Les deux autres équations d'équilibre se transforment en identités.

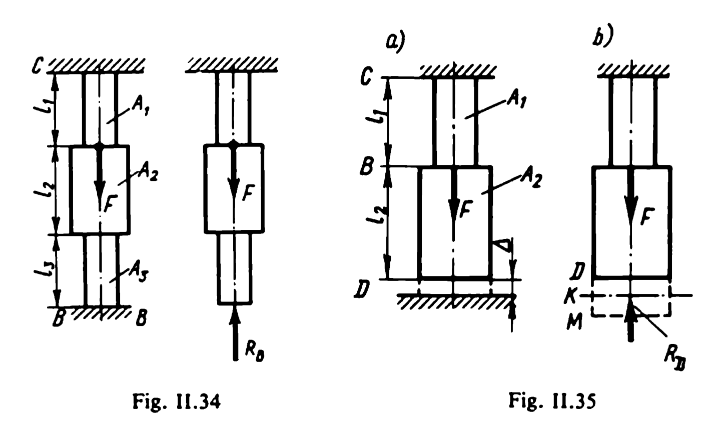


Fig. II.34 Fig. II.35

Puisqu'il y a deux inconnues, alors que l'équation d'équilibre n'est qu'une seule, pour examiner la déformation de la barre ou les déplacements de ses sections il faut composer une équation supplémentaire. De tels systèmes sont dits *à un degré d'hyperstatisme*.

Les systèmes qui imposent la composition de deux équations des déplacements sont dits *à deux degrés d'hyperstatisme*, etc.

Pour résoudre le problème considéré procédons de la façon suivante. Rejetons un encastrement, par exemple, celui d'en bas, en remplaçant son action sur la barre par la réaction inconnue.

Dans le système ainsi obtenu dit ordinairement *principal*, annulons le déplacement de la section inférieure du fait que cette section est encastrée et ne peut pas se déplacer. L'action de la force R_B fait que la section $B—B$ se déplace en haut par suite du raccourcissement de toute la barre, et celle de la force F la déplace en bas par l'allongement de la partie supérieure de la barre de longueur l_1, du fait que la force F, quand on rejette l'encastrement

inférieur, est transmise à l'encastrement supérieur seulement par cette partie de la barre.

Pour établir la déformation, appliquons la loi de Hooke. L'aire de la section de la barre étant différente dans des secteurs différents, la déformation est déterminée par parties.

L'équation des déplacements est de la forme :

$$-R_B l_3/(EA_3) - R_B l_2/(EA_2) - R_B l_1/(EA_1) + Fl_1/(EA_1) = 0.$$

Les trois premiers termes traduisent le déplacement de la section $B—B$ en haut sous l'action de la force R_B, le quatrième terme, son déplacement en bas sous l'action de la force F. D'après cette équation on calcule R_B, après quoi les forces normales dans les sections se calculent sans peine par la méthode des sections, comme on l'a montré aux paragraphes précédents.

La méthode de résolution envisagée, lorsqu'on prend comme inconnus les efforts dans les liaisons rejetées, s'appelle la *méthode des forces* (pour plus de détails, cf. § 66).

Exemple II.10. Calculer la réaction de l'encastrement inférieur de la barre représentée sur la figure II.35, *a*.

Solution. Avant l'application de la charge, entre l'extrémité inférieure de la barre et l'encastrement il y a un petit jeu Δ. L'action de la force rattrape ce jeu et fait apparaître la réaction R_D. Pour calculer cette réaction, rejetons l'encastrement inférieur en remplaçant son action sur la barre par la force R_D (fig. II.35, *b*). Composons l'équation des déplacements. Le segment MD représente le déplacement que subirait la section sous l'action de la force F en l'absence de l'encastrement. Le tronçon KM traduit le déplacement de la section dû à la réaction R_D.

D'après le dessin on voit que

$$\overline{MD} = \overline{KM} + \Delta, \text{ mais } \overline{MD} = Fl_1/(EA_1);$$
$$\overline{KM} = R_D l_2/(EA_2) + R_D l_1/(EA_1).$$

Donc,

$$Fl_1/(EA_1) - R_D l_2/(EA_2) - R_D l_1/(EA_1) = \Delta.$$

Cette équation permet de calculer R_D. Si R_D s'obtient avec le signe plus, cela signifie que sa direction retenue est correcte, c'est-à-dire de bas en haut. Si la valeur de R_D est négative, cela signifie que la force F est insuffisante pour rattraper le jeu et à cet effet il faut appliquer à l'extrémité inférieure de la barre une force R_D dirigée de haut en bas.

Par conséquent, pour une valeur négative de R_D le problème se ramène au calcul des efforts dans les sections droites de la barre sous l'action d'une seule force F (problème isostatique).

Exemple II.11. Calculer la charge admissible pour le système de barres en acier représenté sur la figure II.36. On admet que la poutre BC est parfaitement rigide. La contrainte admissible est σ_{adm}.

Solution. Le calcul de tels systèmes composés de plusieurs barres se fait ordinairement en appliquant une autre méthode qui peut être appelée *méthode de la comparaison des déformations.*

D'abord on fait appel à la méthode des sections pour établir les efforts inconnus et composer les équations d'équilibre qu'admet le problème donné.

Dans notre cas, on ne peut composer que deux de ces équations : annuler la somme des projections sur l'axe vertical de toutes les forces intervenant dans la partie rejetée, et annuler

la somme des moments de ces forces par rapport à un point quelconque, par exemple, par rapport à D. En admettant que tous les efforts provoquent la traction, on obtient

$$\sum Y = 0, \quad N_1 + N_2 + N_3 - F = 0 \,; \sum M_D = 0, \quad N_1 = N_3.$$

Ces deux équations ne peuvent pas déterminer trois inconnues. Il faut donc composer une équation supplémentaire qui exprimerait la condition de compatibilité (de continuité) des déformations des éléments du système.

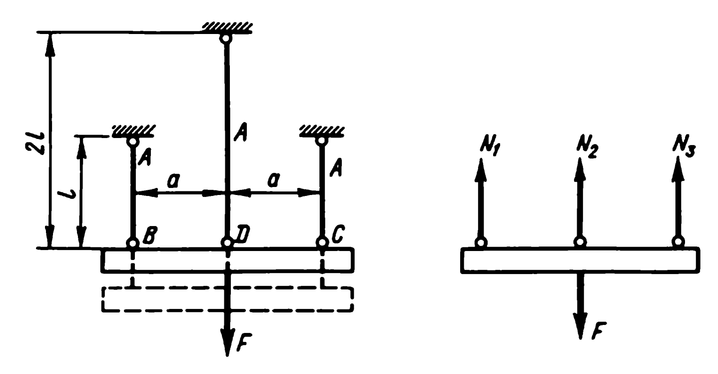


Fig. II.36

Pour composer l'équation de la compatibilité des déformations, il faut représenter le système sous la forme déformée et établir (géométriquement) directement à partir du dessin la relation entre les déformations des barres (parties) différentes du système.

Ainsi, après l'application de la charge la poutre BC se déplace en bas tout en restant parallèle à sa position initiale (par symétrie). Donc, toutes les barres s'allongent de la même façon :

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3.$$

Ceci est précisément l'équation de la compatibilité des déformations. D'après la loi de Hooke, on a $N_1 l/(EA) = N_2 2l/(EA)$, d'où $N_2 = N_1/2$.

En portant les valeurs de N_2 et N_3 dans l'équation d'équilibre 1, on a

$$N_1 = N_3 = 0{,}4\,F, \tag{1}$$

$$N_2 = 0{,}2\,F. \tag{2}$$

Les valeurs admissibles de F se trouvent en portant dans ces expressions les valeurs des efforts normaux admissibles $N_{adm} = A\sigma_{adm}$.

D'après les égalités (1) et (2)

$$F'_{adm} = 2{,}5\,\sigma_{adm}A\,;\; F''_{adm} = 5\sigma_{adm}A.$$

Il est clair que des deux charges F_{adm} il faut retenir comme admissible la plus petite, c'est-à-dire $F_{adm} = F'_{adm} = 2{,}5\,\sigma_{adm}A$. Ainsi, dans notre exemple, la charge admissible est délimitée par la résistance des barres extrêmes.

Dans des cas plus compliqués, le calcul des systèmes hyperstatiques par la méthode de comparaison des déformations peut présenter certaines difficultés et conduire à des résultats incorrects (cf. exemple II.12).

Il est donc recommandé de calculer les systèmes hyperstatiques à l'aide des méthodes plus rigoureuses, telles la méthode des forces ou la méthode énergétique fondée sur le principe de la moindre action.

Exemple II.12. Déterminer les efforts dans les barres du système (fig. II.37, *a*) :

$$\alpha = 30°;\ \beta = 45°\ ;\ A_1 = 3{,}14\ \text{cm}^2\ ;$$
$$A_2 = 3{,}14\ \text{cm}^2\ ;\ A_3 = 21{,}9\ \text{cm}^2.$$

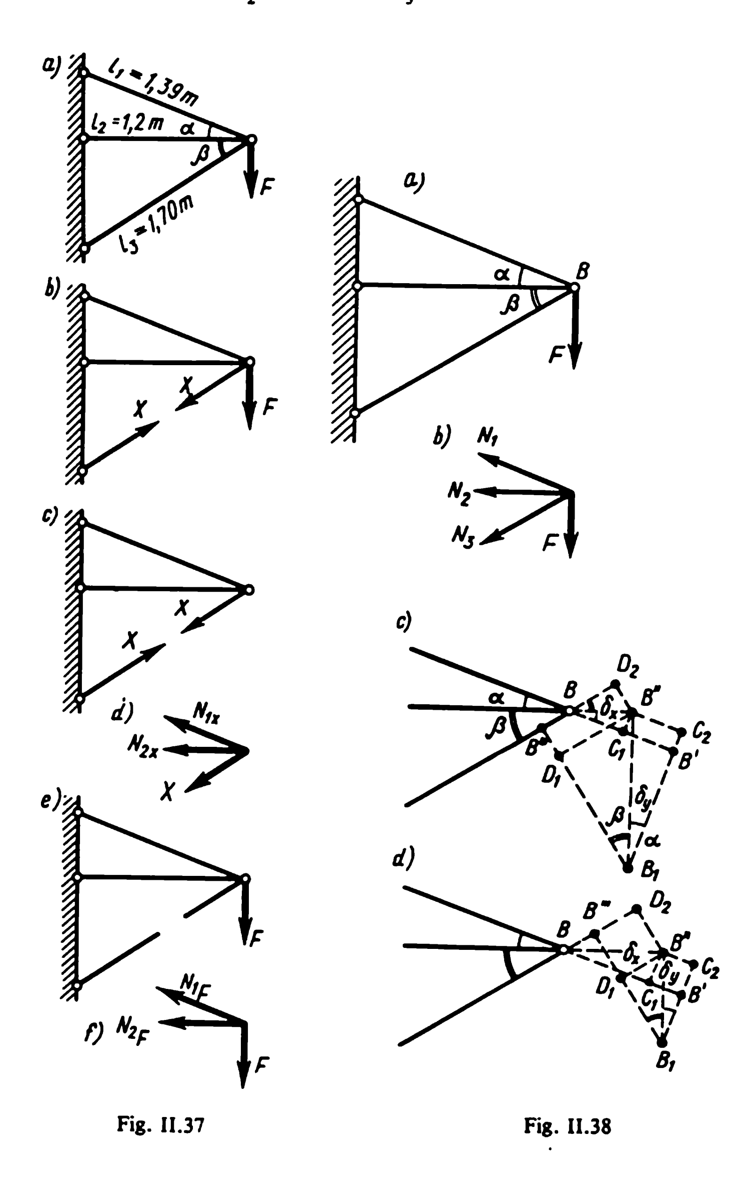


Fig. II.37

Fig. II.38

Solution. Appliquons la méthode énergétique. Coupons une barre, par exemple la barre inférieure (fig. II.37, *b*). Admettons qu'elle est sollicitée à la traction et désignons l'effort par *X*.

Déterminons les efforts dans les barres dus à l'action de l'effort X (fig. 37, c, d):

$$\sum Y = N_{1X} \sin 30° - X \sin 45° = 0,$$
$$N_{1X} = 1{,}414\, X \text{ (traction)};$$
$$\sum X = -1{,}414\, X \cos 30° - N_{2X} - X \cos 45° = 0,$$
$$N_{2X} = -1{,}931\, X \text{ (compression)}.$$

Calculons les efforts dans les barres dus à la charge F (fig. II.37, e, f):

$$\sum Y = N_{1F} \sin 30° - F = 0, \quad N_{1F} = 2F \text{ (traction)};$$
$$\sum X = -N_{1F} \cos 30° - N_{2F} = 0,$$
$$N_{2F} = -1{,}732\, F \text{ (compression)}.$$

Les efforts globaux :

$$N_1 = 2F + 1{,}414X;$$
$$N_2 = -1{,}732F - 1{,}931\, X;$$
$$N_3 = X.$$

L'énergie potentielle de déformation

$$U = \frac{1}{2E} \sum \frac{N_i^2 l_i}{A_i} = \frac{1}{2E} \left[\frac{(2F + 1{,}414X)^2 \cdot 139}{3{,}14} + \frac{(1{,}732F + 1{,}931X)^2 \cdot 120}{3{,}14} + \frac{X^2 170}{21{,}9} \right].$$

Calculons les valeurs de l'effort X à partir de la condition de la moindre énergie potentielle de déformation

$$dU/dX = 0;$$
$$250{,}38F + 176{,}98X + 255{,}63F + 285{,}01X + 15{,}52X = 0, \text{ d'où}$$
$$X = N_3 = -1{,}059F \text{ (compression)};$$
$$N_1 = 2F + 1{,}414\,(-1{,}059F) = 0{,}503F;$$
$$N_2 = -1{,}732F - 1{,}931(-1{,}059F) = 0{,}315F.$$

Résolvons ce problème par la méthode de comparaison des déformations. En admettant que tous les efforts font travailler à la traction, on obtient deux équations d'équilibre (fig. II.38, a, b) :

$$\sum X = -N_1 \cos \alpha - N_2 - N_3 \cos \beta = 0;$$
$$\sum Y = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \beta + F = 0.$$

Composons l'équation des déformations (fig. II.38, d). L'articulation B se déplace en B_1, point de coordonnées δ_x et δ_y. Les déformations des barres étant petites, on peut admettre qu'elles sont égales aux projections des déplacements du nœud B_1 sur les directions initiales correspondantes des barres.

Admettons que l'état déformé est tel que toutes les barres sont allongées, du fait que nous avons adopté que toutes les barres travaillent à la traction (fig. II.38, b). D'après le dessin (II.38, d) on voit que

$$\Delta l_1 = \overline{BB'} = \overline{BC_1} + \overline{B''C_2} = \delta_x \cos \alpha + \delta_y \sin \alpha;$$
$$\Delta l_2 = \overline{BB''} = \delta_x;$$
$$\Delta l_3 = \overline{BB'''} = \overline{BD_2} - \overline{B'''D_2} = \delta_x \cos \beta - \delta_y \sin \beta.$$

En éliminant δ_x et δ_y et en passant des déformations aux efforts, on obtient

$$2{,}31N_1 - 2{,}732N_2 + 0{,}286N_3 = 0.$$

A ceci il faut ajouter les équations d'équilibre :

$$0{,}865N_1 + N_2 + 0{,}706N_3 = 0\,;$$
$$0{,}5N_1 - 0{,}706N_3 - F = 0.$$

En résolvant ces trois équations, on obtient les valeurs correctes :

$$N_1 = 0{,}503F\,;\quad N_2 = 0{,}315F\,;\quad N_3 = -1{,}059F\ \text{(compression).}$$

Si nous avions adopté l'état déformé de la figure II.38, *c* qui ne correspond pas à l'état de contrainte (de forces) adopté, du fait que la troisième barre (inférieure) subit le raccourcissement, nous aurions obtenu

$$\Delta l_1 = \overline{BB'} = \overline{BC_1} + \overline{B''C_2} = \delta_x \cos\alpha + \delta_y \sin\alpha\,;$$
$$\Delta l_2 = \overline{BB''} = \delta_x\,;$$
$$\Delta l_3 = \overline{BB'''} = \overline{D_1B''} - \overline{BD_2} = \delta_y \sin\beta - \delta_x \cos\beta.$$

En éliminant δ_x et δ_y, il vient

$$\Delta l_1/\sin\alpha - \Delta l_3/\sin\beta = (\cos\alpha/\sin\alpha + \cos\beta/\sin\beta)\Delta l_2,$$

ou en l'exprimant en efforts,

$$N_1l_1/(EA_1\sin\alpha) - N_3l_3/(EA_3\sin\beta) - (\cos\alpha/\sin\alpha + \cos\beta/\sin\beta)N_2l_2/(EA_2) = 0.$$

En y portant les valeurs numériques, nous aurions obtenu

$$2{,}31N_1 - 2{,}732\,N_2 - 0{,}286\,N_3 = 0.$$

En résolvant cette équation avec les équations d'équilibre, on aurait obtenu les valeurs incorrectes des efforts

$$N_1 = 0{,}4F\,;\ N_2 = 0{,}458F\,;\ N_3 = -1{,}14F\ \text{(compression).}$$

La situation s'aggrave encore du fait que cette solution semble parfaitement correcte : les barres *1* et *2* sont soumises, comme il se doit, à la traction, et la barre *3*, à la compression*.

Cet exemple montre qu'en résolvant les problèmes hyperstatiques par la méthode de comparaison des déformations, il faut toujours veiller à ce que l'état de contrainte (de forces) corresponde à l'état déformé.

Dans l'exemple envisagé on pourrait adopter comme état déformé celui de la figure II.38, *c*, mais alors il faudrait admettre que l'effort N_3 de l'état de contrainte (fig. II.38, *b*) provoque la compression.

Dans ce cas, on obtiendrait le système d'équations :

$$\left.\begin{aligned} 0{,}865N_1 + N_2 - 0{,}706N_3 &= 0\,;\\ 0{,}5N_1 + 0{,}706N_3 - F &= 0\,;\\ 2{,}31N_1 - 2{,}732N_2 - 0{,}286N_3 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Sa résolution fournirait les valeurs correctes des efforts :

$$N_1 = 0{,}503\,F\,;\ N_2 = 0{,}315\,F\,;\ N_3 = 1{,}059F\ \text{(compression).}$$

---

* Les erreurs de ce genre se rencontrent dans certains manuels et recueils des problèmes de résistance des matériaux.

Certains systèmes rendent impossible l'adoption d'un état déformé tel que toutes les barres subissent l'allongement. Dans ces cas, il vaut mieux commencer la résolution du problème par le choix de l'état déformé (fig. II.39). Par exemple, on peut adopter l'état déformé de la figure II.39, *a*, où les barres *1* et *2* sont allongées, alors que la barre *3* devient plus courte ; il faut alors retenir un état de contrainte tel que les efforts N_1 et N_2 sollicitent à la traction, et l'effort N_3, à la compression (fig. II.39, *b*).

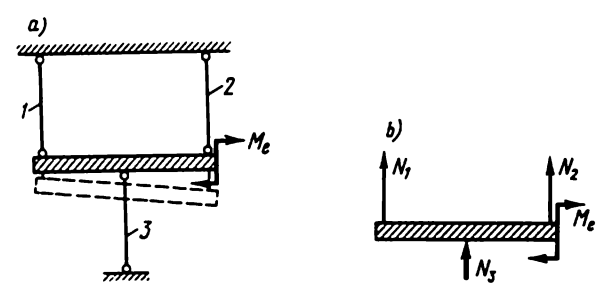


Fig. II.39

D'autres variantes sont également possibles, mais les états déformé et de contrainte doivent toujours correspondre l'un à l'autre. Dans le cas contraire, on peut commettre des erreurs analogues à celle de l'exemple II.12.

§ 21. Contraintes thermiques et de montage. Réglage artificiel des efforts dans les constructions

Considérons deux barres, dont la première (fig. II.40, *a*) est un système isostatique, et la seconde (fig. II.40, *b*), hyperstatique.

Lorsqu'une barre encastrée à l'une de ses extrémités est chauffée de Δt, ses dimensions transversales et longitudinales augmentent (fig. II.40, *a*).

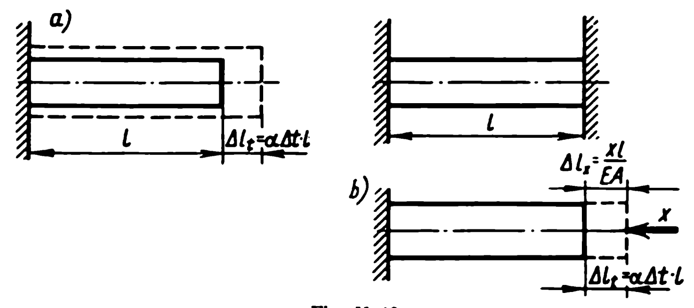


Fig. II.40

D'après la formule connue de la physique, l'allongement Δl_t s'écrit

$$\Delta l_t = \alpha \Delta t l,$$

où α est le coefficient thermique de dilatation linéaire.

Puisqu'il n'existe pas d'obstacle à l'allongement de la barre, elle ne subit aucun effort intérieur.

Lorsqu'on chauffe de Δt une barre encastrée aux deux extrémités (fig. II.40, *b*), à l'intérieur de la barre apparaît un effort de compression interne du fait que le deuxième encastrement empêche l'allongement de la tige.

On en tire la règle générale : *dans des systèmes isostatiques la variation de la température produit des déformations sans faire apparaître des efforts intérieurs ; la variation de la température des systèmes hyperstatiques s'accompagne de l'apparition des efforts intérieurs.* Pour déterminer ces derniers, appliquons la méthode usuelle de calcul des systèmes hyperstatiques. Rejetons en pensée l'un des encastrements, par exemple celui de droite. La barre pourrait alors s'allonger de la quantité $\Delta l_t = \alpha \Delta t l$. Mais la force de réaction X comprime la barre de la grandeur $\Delta l_x = Xl/(EA)$.

Le déplacement réel de la section extrême droite est nul, d'où $\alpha \Delta t l =$ $= Xl/(EA)$ et, enfin,

$$X = EA\alpha\Delta t \quad \text{ou} \quad \sigma_{\text{th}} = X/A = E\alpha\Delta t. \qquad \text{(II.57)}$$

Cette formule n'est vraie que pour une barre de section constante.

Les contraintes thermiques σ_{th} peuvent être très importantes. Pour les réduire on prévoit dans les constructions des *jeux* ou *joints de dilatation* spéciaux.

En plus des contraintes provoquées par l'action de la température, les systèmes hyperstatiques peuvent subir des contraintes produites par le montage de la construction résultant des écarts éventuels des barres isolées par rapport à la longueur de calcul, dus à l'imprécision de fabrication.

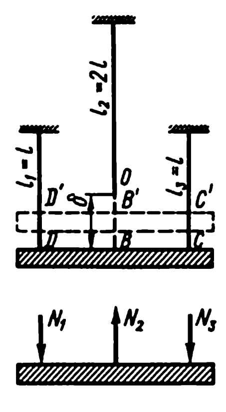


Fig. II.41

Considérons, par exemple, le système de la figure II.41. Supposons que les barres soient fabriquées à partir du même matériau, et l'aire de leur section est la même. Les distances entre les barres sont également identiques, c'est-à-dire $DB = BC$. Supposons que la barre du milieu est de δ plus cour-

te que l'impose la géométrie de la construction. (Pour la clarté des calculs, le segment δ ordinairement très petit par rapport à la longueur de la barre, est représenté avec une grande exagération.) Afin d'assurer le montage, il faut étendre de telle ou telle manière cette barre en rendant ainsi possible sa jonction (par exemple, par soudage) à la poutre *DBC*. Après le montage, il peut en résulter dans les barres des efforts et la poutre *DBC* adoptera la position $D'B'C'$. La longueur des barres extérieures diminuera, c'est-à-dire qu'elles subiront des efforts de compression, et la longueur de la barre du milieu augmentera de segment $\overline{OB'}$, ce qui signifie qu'elle subira un effort de traction.

Pour calculer les efforts dans les barres, appliquons la méthode de comparaison des déformations. Les conditions d'équilibre donnent $\sum M_B = 0$, d'où $N_1 = N_3$; $\sum Y = 0$, d'où $N_2 = 2N_1$.

La condition de compatibilité des déformations amène

$$\overline{DD'} = \overline{BB'} = \overline{OB} - \overline{OB'}, \text{ mais } \overline{DD'} = \Delta l_1, \overline{OB} = \delta, \overline{OB'} = \Delta l_2,$$

donc, $\Delta l_1 = \delta - \Delta l_2$ ou $N_1 l/(EA) = \delta - N_2 2l/(EA)$.

En y portant la valeur de $N_2 = 2N_1$, on obtient

$$N_1 = \delta EA/(5l), N_2 = 2\delta EA/(5l).$$

Le signe plus devant N_1 et N_2 montre que nos suppositions sur leurs directions sont correctes, c'est-à-dire que les barres extrêmes sont comprimées, et celle du milieu, étendue.

Si maintenant on applique à ce système une charge, par exemple, la force F au point B, elle fera subir à toutes les barres la traction (cf. l'exemple II.11 et la figure II.36). En sommant ces efforts avec les efforts de montage, on obtient

$$N_1 = 2F/5 - \delta EA/(5l) \; ; \quad N_2 = F/5 + 2\delta EA/(5l).$$

En changeant le jeu δ on peut *régler artificiellement les efforts et les contraintes dans les systèmes hyperstatiques.*

δ peut être choisi tel, par exemple, que les contraintes dans toutes les barres du système soient les mêmes. En égalant $\sigma_1 = N_1/A = \sigma_2 = N_2/A$, on obtient $\delta = Fl/(3EA)$. Dans ces conditions, toutes les trois barres subiront les mêmes contraintes :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5F/(15A) = 0{,}33F/A.$$

Un système sans réglage des efforts (fig. II.36) donnerait lieu aux contraintes : pour les barres extrêmes

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 2F/(5A) = 0{,}4\,F/A;$$

pour la barre du milieu

$$\sigma_2 = F/(5A) = 0{,}2\,F/A.$$

En comparant ces résultats, on voit que l'extension artificielle de la barre du milieu permet de diminuer la contrainte de calcul de 0,4 F/A à 0,33 F/A.

Ces dernières années, on utilise de plus en plus l'idée du réglage artificiel des efforts pour de différentes constructions, surtout pour celles en béton armé (béton armé précontraint).

L'armature précontrainte avant d'être placée dans du béton, après la pose et la solidification du béton se dégage des dispositifs de tension et produit dans l'élément en béton armé l'état de contrainte inverse à celui que la sollicitation provoque en service. Il importe particulièrement pour le béton de réduire les contraintes de traction auxquelles il résiste mal.

En U.R.S.S. et dans d'autres pays on produit actuellement en masse des éléments précontraints en béton armé prévus surtout pour la construction des ouvrages et des édifices, mais aussi dans une moindre mesure en construction mécanique (bâtis de grosses machines-outils, etc.).

Exemple II.13. Calculer les contraintes produites en été à $t = +30\,°C$ dans les rails en acier (de tramway ou de chemin de fer) si ces rails ont été posés sans jeu en hiver à $t = -30\,°C$. Pour l'acier $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ degré$^{-1}$; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Solution. D'après la formule (II.57) on obtient pour $\Delta t = 60°$, $\sigma_{th} = 125 \times$ $\times\, 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 60 = 150$ MPa, ce qui ne dépasse pas beaucoup les contraintes admissibles de l'acier à bas carbone.

Exemple II.14. Calculer les contraintes dans le même rail si tous les 10 m on prévoit un jeu $\Delta = 6$ mm (fig. II.42).

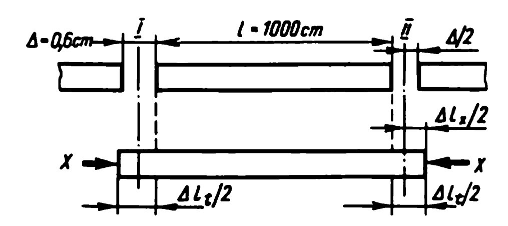


Fig. II.42

Solution. Si les rails voisins n'opposaient pas d'obstacle, l'allongement par échauffement du rail envisagé serait $\Delta l_t = \alpha l \Delta t$.

La force de réaction X apparue après le rattrapage du jeu (lorsque la longueur du rail sera égale à $l + \Delta$, c'est-à-dire à la distance entre les lignes I et II) comprime le rail de la grandeur $\Delta l_X = Xl/(EA) = \sigma_{th} l/E$. Le dessin montre que $\Delta l_t = \Delta l_X + \Delta$. En portant dans cette expression les valeurs de Δl_t, Δl_X et Δ, on trouve $\sigma_{th} = 30$ MPa. Par conséquent, un jeu peu grand suffit pour réduire sensiblement les contraintes thermiques. On vérifie sans peine que les contraintes σ_{th} sont annulées par un jeu de 7,5 mm.

§ 22. Concentration des contraintes. Contraintes de contact

La distribution des contraintes dans la section droite d'une barre tendue (comprimée) n'est uniforme qu'à une certaine distance du point d'application de la force et sous la condition que les dimensions transversales de la

barre ne changent pas suivant la longueur ou leur changement est très progressif. Mais si le contour de la section longitudinale change brusquement au droit où la forme prismatique ou cylindrique de la barre est perturbée, la distribution des contraintes dans la section droite cesse d'être régulière. Ce phénomène de la croissance importante des contraintes au droit du changement brusque de la forme géométrique de la pièce s'appelle *concentration des contraintes*. La détermination des contraintes au droit de leur concentration se fait soit par le mode expérimental, soit par les méthodes de la théorie de l'élasticité.

A titre d'exemple la figure II.43, *a* visualise la résolution du problème pour une large bande à petit trou soumise à une traction lente. La con-

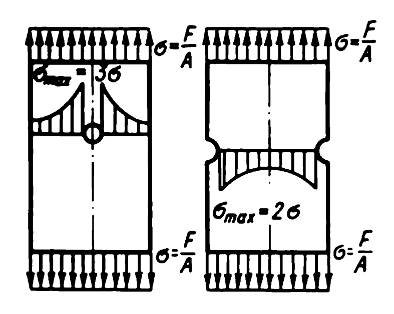


Fig. II.43

trainte maximale σ_{max} près du bord du trou est trois fois supérieure à la contrainte moyenne (nominale) calculée d'après la formule $\sigma = F/A$.

Pour une large bande légèrement affaiblie par des rainures demi-circulaires suivant les bords, la contrainte maximale est deux fois supérieure à sa valeur nominale (fig. II.43, *b*).

Le rapport de la contrainte maximale locale à la contrainte nominale s'appelle *coefficient théorique de la concentration des contraintes*

$$\alpha_\sigma = \sigma_{max}/\sigma. \quad \text{(II.58)}$$

Par contrainte *nominale* on entend la contrainte déterminée d'après les formules de la résistance des matériaux sans tenir compte de l'effet de concentration. Par exemple, pour la bande à trou $\sigma = F/A$, où A est l'aire de la section affaiblie.

Le coefficient théorique de la concentration des contraintes calculé sous l'hypothèse qu'en se déformant le matériau observe la loi de Hooke, dans de nombreux cas ne décrit pas correctement l'influence de la concentration des contraintes sur la résistance de la pièce. Si la loi de Hooke était respectée par le matériau jusqu'à la rupture, la résistance de la pièce en présence de la concentration des contraintes serait de α_σ fois inférieure à celle d'une pièce ne possédant pas de foyers de concentration. D'après les expériences, pour la plupart des matériaux, en présence de la concentration des con-

traintes la résistance diminue moins que de α_σ fois. Cette diminution est déterminée expérimentalement par le rapport de la charge de rupture σ_u de la pièce sans concentration des contraintes à la charge de rupture $\sigma_{u,c}$ de la pièce possédant le concentrateur de contrainte donné :

$$K_\sigma = \sigma_u/\sigma_{u,c}. \qquad \text{(II.59)}$$

Le coefficient K_σ s'appelle *coefficient efficace de concentration des contraintes*. Ses valeurs sont données par des aide-mémoire.

Les expériences montrent que sous des charges statiques appliquées aux pièces en matériaux plastiques, pratiquement $K_\sigma = 1$, c'est-à-dire que sous de telles charges la concentration des contraintes doit être prise en compte seulement dans le cas des pièces en matériaux fragiles ou peu plastiques.

Sous l'action d'une charge variable (calcul à l'endurance), la concentration des contraintes doit etre observée pour tous les matériaux.

Les contraintes locales élevées apparaissent également au droit de la transmission de la pression d'un corps à un autre. Si le contact initial des corps a lieu en un point ou suivant une ligne, on dit que la contrainte est *de contact* ; mais si le contact initial porte sur une aire de dimensions finies, il est d'usage de dire que c'est une contrainte *de compression* (fig. II.44).

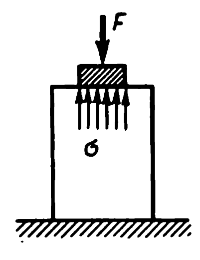


Fig. II.44

La déformation des corps en contact fait que le contact ponctuel ou linéaire initial se transforme en contact suivant une petite aire. Suivant l'aire de contact la répartition de la pression transmise d'une pièce à une autre est irrégulière.

Le calcul des contraintes de contact et des déformations de contact se fait par les méthodes de la théorie de l'élasticité. Ce problème est résolu sous des hypothèses suivantes : a) les matériaux des pièces en contact observent la loi de Hooke ; b) les dimensions linéaires de l'aire de contact sont petites devant les rayons de courbure des surfaces en contact ; c) la force comprimante est orientée suivant la normale à l'aire de contact ; d) à la surface de contact n'apparaissent que les forces de pression normales à cette surface.

Sous ces hypothèses, la théorie de l'élasticité démontre que la distribution des forces de pression suivant l'aire de contact est régie par la loi de la

surface d'un ellipsoïde et, dans le cas général, l'aire de contact a la forme d'une ellipse. La pression est maximale au centre de cette aire.

Donnons sans les déduire certaines formules relatives aux cas particuliers de la déformation de contact. On admet que les modules d'élasticité sont les mêmes pour les corps en contact et que le coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$.

Dans le cas de la pression réciproque de deux sphère élastiques de diamètres d_1 et d_2 (fig. II.45), l'aire de contact qui se forme est circulaire, et son rayon a se calcule d'après la formule :

$$a = 0{,}88 \sqrt[3]{Fd_1 d_2/[E(d_1 + d_2)]}. \qquad \text{(II.60)}$$

La pression maximale et, par suite, la contrainte de compression au centre de l'aire de contact sont déterminées par la formule

$$\sigma_{max} = 0{,}62 \sqrt[3]{FE^2 [(d_1 + d_2)/(d_1 d_2)]^2}. \qquad \text{(II.61)}$$

La formule (II.61) est vraie également pour le cas d'une sphère de diamètre d_1 reposant sur une surface sphérique concave de diamètre d_2 (fig.

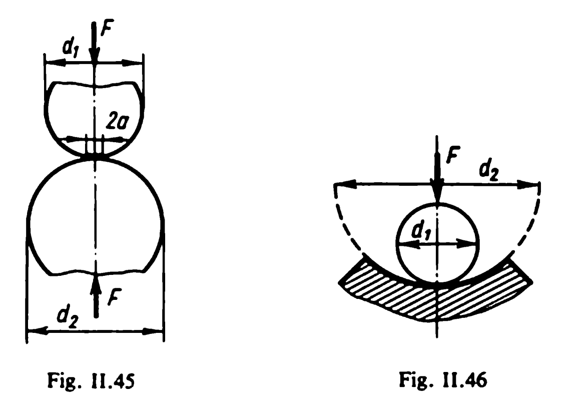


Fig. II.45 Fig. II.46

II.46) ; dans ce cas, il convient seulement de prendre d_2 avec le signe opposé. Il en résulte

$$\sigma_{max} = 0{,}62 \sqrt[3]{FE^2 [(d_1 - d_2)/(d_1 d_2)]^2}. \qquad \text{(II.62)}$$

Par rapport au cas précédent les contraintes obtenues sont plus faibles. Lorsqu'il s'agit de la pression d'une sphère sur un plan, les contraintes sont déterminées d'après la formule (II.62) où l'on pose que d_2 est infiniment grand:

$$\sigma_{max} = 0{,}62 \sqrt[3]{FE^2/d^2}. \qquad \text{(II.63)}$$

Pour les matériaux plastiques le plus de danger présentent les contraintes tangentielles et non pas normales. Pour notre cas, les contraintes tangentielles les plus grandes se manifestent au point situé à une profondeur égale environ à la moitié du rayon de l'aire de contact. Elles valent

$$\tau_{max} = 0{,}31\sigma_{max}. \tag{II.64}$$

Pour le contact des corps cylindriques à génératrices parallèles dont on admet que la longueur est infiniment grande, la contrainte maximale se calcule d'après la formule

$$\sigma_{max} = 0{,}59\sqrt[3]{qE\,(d_1 + d_2)/(d_1 d_2)}, \tag{II.65}$$

où q est la charge uniformément répartie suivant la longueur des cylindres.

En changeant dans la formule (II.65) le signe de d_2, on obtient la contrainte dans le cas de la pression exercée par un cylindre sur une surface cylindrique concave.

Les contraintes tangentielles sont maximales au point qui repose à la profondeur égale à 0,4 a (a est la largeur de l'aire de contact). Elles valent

$$\tau_{max} = 0{,}31\;\sigma_{max}.$$

Pour les autres cas, les formules de calcul des contraintes de contact sont données par les aide-mémoire.

Les formules mentionnées montrent que la relation entre la charge et les contraintes de contact est non linéaire.

Si les dimensions de l'aire de contact sont comparables avec le rayon de courbure des surfaces en contact, les formules mentionnées sont inapplicables. Un tel problème se pose, par exemple, en calculant la pression exercée par la surface du corps d'un boulon ou d'un rivet sur la surface cylindrique du trou. Dans ce cas la solution théorique est très compliquée, et pour vérifier la résistance du matériau dans la zone de l'aire de contact, on recourt ordinairement aux méthodes empiriques approchées.

Par exemple, pour le calcul des rivets et des boulons, on admet que les contraintes sur l'aire de contact (compression localisée) sont réparties uniformément, alors que les contraintes admissibles choisies sur la base des données empiriques sont 2 à 2,5 fois supérieures aux contraintes admissibles à la compression.

Ces contraintes s'appellent ordinairement *contraintes localisées* et non pas contraintes de contact, bien que le contact initial entre le rivet et la tôle s'établit suivant une ligne.

Le tableau II.6 donne les valeurs des contraintes admissibles pour certaines nuances des aciers dans le cas du contact ponctuel initial.

Tableau II.6

Nuance de l'acier	Limite d'écoulement, $\sigma_{0,2}$, MPa	Charge de rupture, σ_u, MPa	Contrainte admissible maximale sur l'aire, σ'_{con}, MPa
30	300	480	1200
40	350	570	1400
50	380	630	1450
50Г	400	700	1550
20X	400	700	1550

On voit que les valeurs des contraintes admissibles sont sensiblement plus grandes que la limite d'écoulement et même que la charge de rupture.

Nous montrerons au chapitre VIII que ce n'est que dans le cas des charges statiques que les contraintes aussi élevées produisent dans les corps en contact des déformations plastiques admissibles.

CHAPITRE III

CISAILLEMENT

§ 23. Généralités

Si les faces d'un élément ne sont sollicitées que par des contraintes tangentielles (fig. III.1), l'état de contrainte s'appelle *cisaillement pur* (cf. également § 15). Les faces sur lesquelles se manifestent seulement les contraintes tangentielles sont nommées *aires de cisaillement pur.*

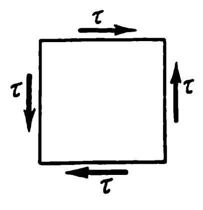


Fig. III.1

L'exemple d'un corps dont tous les points sont soumis au cisaillement pur est fourni par une barre tordue de section circulaire (cf. dans ce qui suit).

En plus des calculs à la résistance par rapport au cisaillement pur, on calcule souvent la résistance par rapport aux contraintes tangentielles indépendamment des aires auxquelles elles sont appliquées, que ce soit les aires de cisaillement pur ou autres aires quelconques. Ces calculs sont dits *de cisaillement*. L'exemple des accouplements calculés au cisaillement est fourni par les rivetages, les boulonnages et les soudages.

Malgré plusieurs simplifications adoptées, les calculs au cisaillement assurent pratiquement une sécurité parfaitement suffisante.

§ 24. Etat de contrainte et déformations de cisaillement pur

En cisaillement pur l'état de contrainte peut être étudié à l'aide des formules données au § 16 en y annulant σ_α et σ_β.

On peut montrer, en particulier, que dans le cisaillement pur les contraintes principales sont égales en valeur mais de signe opposé : $\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm \tau$,

c'est-à-dire qu'une contrainte principale est celle de traction et l'autre, de compression (fig. III.2). Les deux contraintes principales étant différentes de zéro, le cisaillement est un cas particulier de l'état de contrainte biaxial.

La formule [II.35] entraîne que les aires principales forment avec la direction des aires de cisaillement pur (fig. III.2) un angle de 45°. En effet, pour $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$, on obtient $\operatorname{tg} 2\psi_0 = \infty$, donc $\psi_0 = 45°$.

Examinons maintenant les déformations produites par le cisaillement. L'élément *KBCD*, rectangulaire avant la déformation (fig. III.3, *a*), après

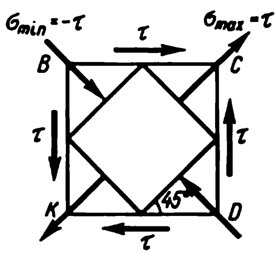


Fig. III.2

la déformation prend la forme *KB'C'D* (on admet que la face *KD* est encastrée).

L'angle γ_1 est appelé ***déformation angulaire*** ou ***angle de cisaillement***. D'après les expériences, dans des limites définies des sollicitations, de nombreux matériaux donnent lieu en cisaillement à la relation linéaire suivante entre les contraintes et les déformations :

$$\gamma = \tau / G, \qquad \textbf{[III.1]}$$

qui traduit la loi de Hooke au cisaillement. La constante *G* s'appelle ***module de cisaillement*** ou ***module d'élasticité transversale*** ; il caractérise le pouvoir du matériau de résister à la déformation au cisaillement.

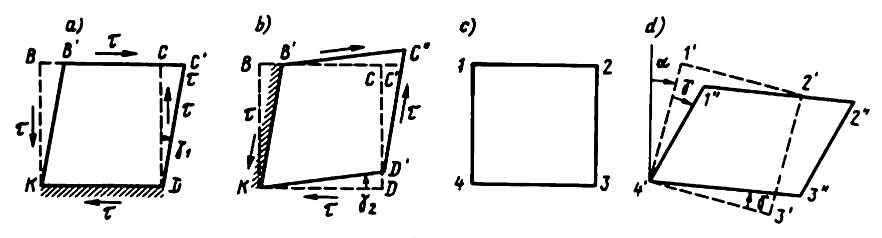


Fig. III.3

La relation linéaire entre τ et γ est justifiée jusqu'à ce que les contraintes tangentielles ne dépassent pas la limite de proportionnalité au cisaillement. La formule [II.42] entraîne qu'en cisaillement pur la déformation volumique υ est nulle du fait que $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$.

La propriété de parité des contraintes tangentielles permet d'établir facilement la propriété de parité des déformations angulaires. En effet, si on

fixe la face *KD* (fig. III.3, *a*), on obtient pour l'angle de cisaillement

$$\gamma_1 = \tau/G. \qquad \text{(III.1a)}$$

En fixant maintenant la face *KB'* (fig. III.3, *b*), on obtient pour l'angle γ_2

$$\gamma_2 = \tau/G. \qquad \text{(III.1b)}$$

Les premiers membres étant égaux, les deuxièmes membres le sont aussi :

$$|\gamma_1| = |\gamma_2|. \qquad \text{(III.1c)}$$

Par conséquent, les *déformations angulaires de deux aires réciproquement perpendiculaires sont égales en valeur et de signe opposé (propriété de parité des déformations angulaires).*

Le déplacement de l'élément *1 2 3 4* sous l'effet des déformations linéaires et angulaires est visualisé sur la figure III.3, *d*.

On peut imaginer que d'abord l'élément *1 2 3 4* se déplace comme un corps parfaitement rigide en adoptant après avoir tourné de l'angle α la position *1'2'3'4'*. Puis sous l'effet des déformations linéaires les côtés *1 2* et *4 3* s'allongent et les côtés *1 4* et *2 3* se raccourcissent. Les déformations angulaires font que les côtés *1'4'* et *4'3'* tournent des angles γ égaux en valeur et de signe opposé, de façon que finalement l'élément *1 2 3 4* vient en position *4'1''2''3''* (fig. III.3, *d*).

§ 25. Energie potentielle au cisaillement. Relation entre trois constantes élastiques *E*, *G* et ν

Calculons l'énergie potentielle au cisaillement. Pour simplifier supposons que la face *KD* de l'élément est fixe (cf. fig. III.3). Alors, lorsque la face supérieure se déplace, la force $\tau\delta\,dx$ (où δ est l'épaisseur de l'élément) effectue le travail de déplacement γdy. Par conséquent, l'énergie potentielle de la déformation accumulée par l'élément est $dU = \tau\gamma\delta\,dxdy/2$.

L'énergie potentielle spécifique

$$u = dU/dV = \tau\gamma/2.$$

En exprimant γ à l'aide de τ d'après la loi de Hooke (III.1), on obtient

$$u = \tau^2/(2G). \qquad \text{[III.2]}$$

Le facteur 1/2 est pris du fait que la force est directement proportionnelle au déplacement.

D'autre part, l'énergie potentielle peut être exprimée à l'aide des contraintes normales principales. La formule [II.53] de l'état de contrainte plan, ce qui est le cas du cisaillement pur, permet d'obtenir en posant $\sigma_2 = 0$

$$u = (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_3)/(2E). \qquad \text{(III.3)}$$

Or en cisaillement les contraintes principales sont $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_3 = -\tau$;

donc,

$$u = \tau^2(1 + \nu)E. \qquad \text{(III.4)}$$

Puisque l'énergie ne doit pas dépendre de l'orientation des faces de l'élément, en égalant les deuxièmes membres des expressions [III.2] et [III.4], on obtient

$$\tau^2/(2G) = \tau^2(1 + \nu)/E.$$

On en tire la relation entre le module de cisaillement G et le module d'élasticité E

$$G = E/[2(1 + \nu)]. \qquad \text{[III.5]}$$

Pour l'acier le module de cisaillement $G = 2 \cdot 10^5/[2(1 + 0,3)] \approx \approx 8 \cdot 10^4$ MPa.

§ 26. Calculs pratiques de cisaillement

Considérons les principes des méthodes pratiques de calcul de cisaillement des rivures et des soudures. Ces principes sont envisagés de plus près dans les cours des éléments des machines et des constructions métalliques en acier.

La figure III.4, *a* représente l'assemblage de deux tôles par rivetage (à recouvrement). L'allure de la rupture éventuelle d'un assemblage par rivetage est représentée sur la figure III.4, *b*.

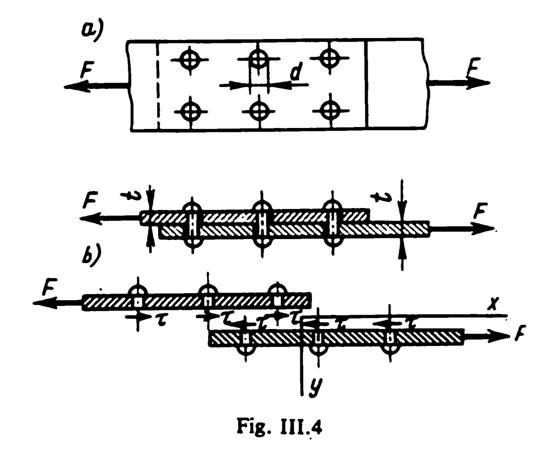


Fig. III.4

L'assemblage subit la rupture par suite de cisaillement des rivets suivant la ligne de contact des tôles. Si chaque rivet est cisaillé suivant un plan, on dit que le rivetage est *monocisaillé* (fig. III.4), si la sollicitation est subie suivant deux plans, on dit que l'assemblage est *bicisaillé* (fig. III.5), etc.

Compte tenu de grandes difficultés définies par la nécessité de déterminer l'état de contrainte réel du matériau du rivet dans la zone de rupture,

pour simplifier le problème on admet que dans les plans de cisaillement agissent seulement des contraintes tangentielles.

Ensuite une question se pose à savoir : comment se répartit la force *F* entre les rivets isolés, c'est-à-dire les rivets sont-ils sollicités tous de la

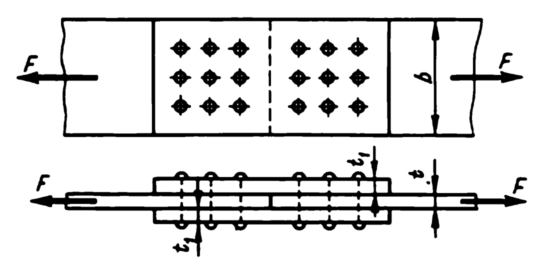


Fig. III.5

même façon ? D'après les recherches théoriques et empiriques pour les rivets (dans le sens de l'action de la force) ce n'est pas le cas.

Si le rivetage se calcule comme un système hyperstatique en admettant, par exemple, que le système principal correspond à la figure III.6, alors,

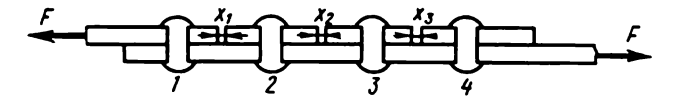


Fig. III.6

dans les rivets, pour les efforts tranchants $Q_3 = X_3 - X_2$, etc., on obtient les résultats consignés sur le tableau III.1 (le problème est résolu sous l'hypothèse que la surface des tôles rivetées est la même).

On voit que l'augmentation du nombre de rivets dans la rangée rend leur service plus irrégulier. Avec six rivets les forces de cisaillement dans les

Tableau III.1

Nombre de rivets	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_{moy}
	(en fractions de *F*)						
3	0,353	0,294	0,353	—	—	—	0,333
4	0,29	0,21	0,21	0,29	—	—	0,25
5	0,26	0,17	0,14	0,17	0,26	—	0,20
6	0,24	0,15	0,11	0,11	0,15	0,24	0,166

rivets extrêmes (premier et sixième) sont presque 2,5 fois supérieures à celles qui interviennent dans les rivets du milieu (troisième et quatrième).

Lorsqu'il s'agit de l'aboutement des éléments à sections droites différentes, le travail des rivets devient plus irrégulier. Les surcharges subies par les rivets du côté de la tôle à section droite plus petite sont plus fortes.

Toutefois, les expériences montrent que dans le cas d'une charge statique, les rivets sont cisaillés simultanément. Ceci s'explique par le fait qu'à l'instant de la rupture la plasticité du matériau et les jeux établis entre les rivets égalisent les efforts subis par ces derniers.

Mais quand les charges ont une allure dynamique et vibratoire, l'irrégularité du travail des rivets doit être prise en considération.

Résumons : on peut admettre que sous l'action d'une charge statique l'effort tranchant dans chaque rivet vaut

$$Q = F/n, \tag{III.6}$$

où F est la force subie par le rivetage ; n, le nombre de rivets.

Ensuite, on admet que dans le plan de cisaillement les contraintes tangentielles sont réparties uniformément, bien que d'après les recherches il n'en est pas ainsi. Pourtant, une solution strictement théorique de cette question est bien difficile, d'autant plus qu'entre les rivets et les tôles il existe des jeux, les tôles entre elles subissent le frottement, etc. D'autre part, les rivets se font en acier des nuances les plus plastiques, ce qui vers l'instant de rupture rend sous l'effet de la constitution des déformations plastiques plus régulière la distribution des contraintes tangentielles.

En adoptant que la distribution des contraintes tangentielles dans la section du rivet est uniforme, on trouve sans peine leur valeur. En composant l'équation d'équilibre de la partie sectionnée de l'assemblage, par exemple, de la partie supérieure (cf. fig. III.4, *b*), on obtient

$$\sum X = 0, \quad -F + n\tau A = 0, \quad \text{d'où} \quad \tau = F/(nA), \tag{III.7}$$

où $A = \pi d^2/4$ est l'aire de la section droite du rivet de diamètre d.

En utilisant la formule (III.6), on obtient à partir de (III.7)

$$\tau = Q/A. \tag{III.8}$$

La *condition de la résistance* au cisaillement des rivets s'écrit

$$\tau = F/(An) = Q/A \leqslant \tau_{adm}, \qquad [III.9]$$

où τ_{adm} est la contrainte tangentielle admissible (contrainte de cisaillement admissible).

La formule [III.9] permet de calculer aisément le nombre nécessaire de rivets monocisaillés :

$$n \geqslant F/(\pi d^2/4)\tau_{adm}. \tag{III.10}$$

Pour une rivure bi- ou multicisaillée, dans la formule [III.9] il faut prendre n égal au nombre total de cisaillements des rivets placés d'un côté de la jonction.

Le diamètre des trous pratiqués dans les tôles à river est de 0,5 à 1 mm plus grand que celui du rivet. Dans les formules de calcul figure le diamètre du trou, du fait que dans l'assemblage réalisé le rivet comble pratiquement

tout l'espace. Les contraintes tangentielles admissibles sont établies d'habitude par voie expérimentale, pour élucider l'influence exercée sur la résistance de l'assemblage par la distribution irrégulière des contraintes, des forces de frottement, des jeux, etc. Pour le calcul des rivets on adopte $\tau_{adm} = (0,6 \text{ à } 0,8)\ \sigma^t_{adm}$, où σ^t_{adm} est la contrainte admissible à la traction.

Les matériaux fibreux (par exemple, le bois) très inhomogènes et anisotropes, ont, d'après les données expérimentales, une très faible résistance au cisaillement dans le sens des fibres. Par exemple, pour le pin on retient dans le cas du cisaillement le long des fibres $\tau_{adm} = 0,1\sigma^t_{adm}$.

Outre le calcul au cisaillement, les rivures sont calculées à la compression localisée. On vérifie les contraintes de compression suivant l'aire de contact des tôles assemblées et des rivets. Les projections des aires de compression localisée sur le plan du dessin sont représentées sur la figure III.4, *a* par des lignes doubles. L'aire de compression localisée d'un rivet est adoptée égale à $A_{con} = dt$.

Dans le cas du rivetage à recouvrement de deux tôles d'épaisseur différente, pour calculer A_{con} il faut prendre t_{min}. Pour un rivetage à couvre-joint double (cf. fig. III.5), il faut entendre par t l'épaisseur des tôles assemblées si elle ne dépasse pas $2t_1$, où t_1 est l'épaisseur d'un couvre-joint. Dans le cas contraire (avec $2t_1 < t$), il faut adopter $A_{con} = 2dt_1$.

On considère que suivant l'aire de compression localisée la contrainte est répartie uniformément et la condition de la résistance à la compression est exprimée par la formule

$$F/(n'A_{con}) \leqslant \sigma'_{con}, \qquad \text{(III.11)}$$

où σ'_{con} est la contrainte admissible à la compression ; n', le nombre de rivets. Dans le cas des trous forés ou percés et ensuite alésés, on adopte $\sigma'_{con} = 2\sigma'_{adm}$.

La formule (III.11) permet de calculer le nombre de rivets nécessaire d'après la condition de la résistance à la compression :

$$n' \geqslant F/(dt\ \sigma'_{con}). \qquad \text{(III.12)}$$

Des deux quantités n et n' on retient celle qui est la plus grande.

La formule $\tau = Q/A$ permet également de calculer les soudures, qui évincent de plus en plus les rivures. La figure III.7, *a* représente l'assemblage de deux tôles par joint à clin par cordons frontaux et latéraux. Pour le calcul des uns et des autres on considère que la section dangereuse du cordon coïncide avec le plan qui passe par la bissectrice *mn* de l'angle droit *DBC* (fig. III.7, *b*). Ainsi, pour le cordon frontal l'aire de la section dangereuse est égale à $b \cdot 0,7\ k$, et pour le cordon latéral, à $l \cdot 0,7\ k$, où k est la cathète du cordon ; dans le cas représenté sur la figure III.7, la cathète du cordon est égale à l'épaisseur t de la tôle. On admet que suivant la section dangereuse les contraintes tangentielles sont réparties uniformément. Compte tenu des conditions adoptées, la charge admissible du cordon fron-

tal se calcule d'après la formule

$$F'_{adm} = b \cdot 0{,}7\, k\, \tau'_{adm}, \qquad (III.13)$$

où τ'_{adm} est la contrainte admissible au cisaillement d'un cordon de soudure.

L'effort admissible d'un cordon latéral

$$F''_{adm} = l \cdot 0{,}7\, k\, \tau'_{adm}. \qquad (III.14)$$

Il est clair que pour la résistance de l'assemblage il faut que la résistance admissible globale des cordons ne soit pas inférieure à la force subie par l'assemblage

$$2F'_{adm} + 2F''_{adm} \geqslant F. \qquad (III.15)$$

En se donnant la dimension de k, cette équation permet de calculer la longueur nécessaire des cordons.

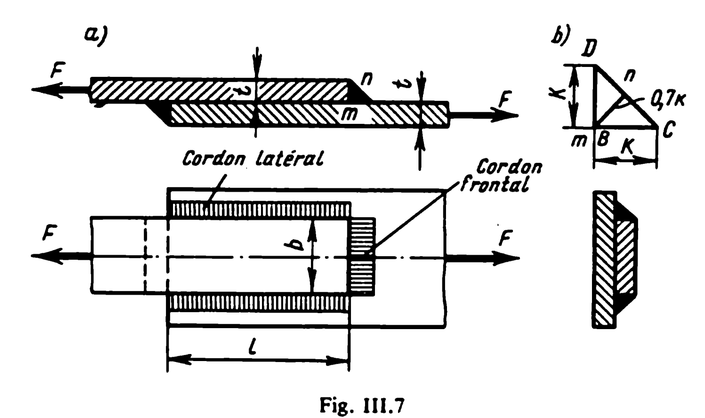


Fig. III.7

Exemple III.1. Calculer la rivure de deux tôles de même section d'épaisseur t = 16 mm renforcées par deux couvre-joints (cf. fig. III.5) si F = 0,5 MN. Les contraintes admissibles : σ_{adm} = 160 MPa ; τ_{adm} = 90 MPa ; σ'_{con} = 320 MPa.

Solution. Dans notre cas les rivets sont bicisaillés du fait que la rupture de l'assemblage n'est possible que si chaque rivet est cisaillé suivant deux plans, le diamètre du rivet étant d = = 20 mm = $2 \cdot 10^{-2}$ m. Déterminons d'après la formule (III.10) le nombre nécessaire de cisaillements :

$$n = \frac{F}{(\pi d^2/4)\tau_{adm}} = \frac{0{,}5 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 10^{-4} \cdot 90} = 17{,}6 \text{ cisaillements.}$$

Par conséquent, il faut retenir 9 rivets. Le nombre nécessaire de rivets est déterminé par rapport à la compression par la formule (III.12) :

$$n' = \frac{F}{td\sigma'_{con}} = \frac{0{,}5}{0{,}016 \cdot 0{,}02 \cdot 320} = 5{,}85 \approx 6 \text{ rivets.}$$

Le calcul décisif s'est avéré celui au cisaillement. On retient donc 9 rivets de chaque côté du joint en trois rangées de trois rivets par rangée (cf. fig. III.5). Choisissons la section de la tôle

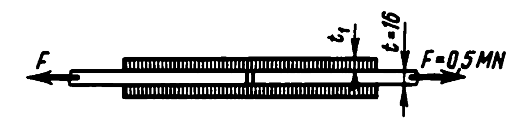
par calcul à la traction :

$$A = F/\sigma_{adm} = 0,5/160 = 31,3 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 31,3\ cm^2.$$

On en tire pour une épaisseur $t = 1,6$ cm la largeur de la tôle : $b_0 = A/t = 31,3/1,6 = 19,5$ cm.

A cette largeur active il faut ajouter la largeur des trous $3d = 6$ cm pour obtenir la largeur totale de la tôle $b = 19,5 + 6 = 25,5$ cm. Cette largeur suffit parfaitement pour placer trois rivets. (La distance retenue entre les centres des rivets est de $3d$.) L'épaisseur t_1 de chaque couvre-joint ne doit pas être inférieure à la moitié de l'épaisseur d'une tôle; on choisit $t_1 = 0,8$ cm.

Exemple III.2. Calculer la soudure pour les données de l'exemple précédent (fig. III.8). Pour les cordons de soudage la contrainte de cisaillement admissible $\tau_{adm} = 110$ MPa.



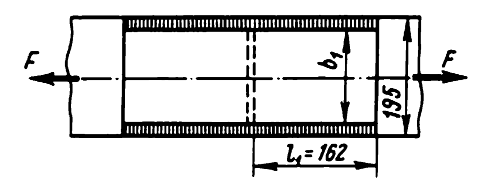


Fig. III.8

Solution. Puisqu'il faut que la place soit suffisante pour disposer des cordons latéraux, prenons le couvre-joint de largeur b_1 légèrement inférieure à celle de la tôle b_0, c'est-à-dire $b_1 = b_0 - 2t = 19,5 - 3,2 = 16,3$ cm. Par condition d'égale résistance, l'aire de la section de deux couvre-joints ne doit pas être inférieure à l'aire de la section de la tôle, c'est-à-dire $2b_1t_1 \geqslant A$. Il s'ensuit que l'épaisseur du couvre-joint :

$$t_1 \geqslant 1,6 \cdot 19,5/(2 \cdot 16,3) = 0,96\ cm.$$

Retenons $t_1 = 1$ cm. Calculons d'après la condition [cf. formule (III.14)] la longueur active des cordons latéraux

$$110 \cdot 4 \cdot 0,7 \cdot k \cdot l_1 = 0,5.$$

Il en résulte avec $k = t_1 = 0,01$ m

$$l_1 = 0,162\ m = 16,2\ cm.$$

CHAPITRE IV

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DE LA SECTION

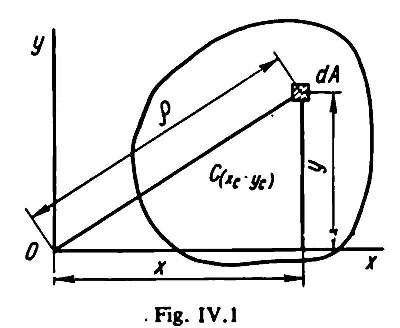
§ 27. Moment statique de la section

En poursuivant l'étude de la résistance, de la rigidité et de la stabilité nous devons envisager certaines caractéristiques de la section : les moments statiques, les moments d'inertie, les couples de réaction.

On appelle moment statique S_x d'une section (d'une figure) par rapport à un axe x quelconque (fig. IV.1) la caractéristique géométrique déterminée par l'intégrale de la forme

$$S_x = \int_A y \mathrm{d}A, \qquad \text{[IV.1]}$$

où y est la distance entre l'aire élémentaire dA et l'axe x.



. Fig. IV.1

L'unité du moment statique est une unité de longueur de puissance trois, ordinairement cm³. Le moment statique peut être positif, négatif et, dans un cas particulier, nul. Si l'on assimile l'aire à la force appliquée perpendiculairement au plan du dessin, l'intégrale [IV.1] peut être envisagée comme la somme des moments des forces par rapport à l'axe x. D'après le théorème de la mécanique rationnelle sur le moment de la résultante on peut écrire

$$S_x = \int_A y \mathrm{d}A = A y_C, \qquad \text{(IV.2)}$$

où A est l'aire de toute la figure (résultante) ; y_C, la distance entre le centre de gravité de la figure et l'axe x.

La formule (IV.2) conduit à la formule de l'ordonnée du centre de gravité

$$y_C = S_x/A. \qquad \text{[IV.3]}$$

D'une façon analogue, le moment statique par rapport à l'axe y

$$S_y = \int_A x\mathrm{d}A = Ax_C, \qquad \text{(IV.4)}$$

d'où

$$x_C = S_y/A. \qquad \text{[IV.5]}$$

Le centre de gravité possède cette propriété qu'un corps reposant sur ce point garde son équilibre.

Les formules (IV.2) et (IV.4) entraînent que si les axes x et y passent par le centre de gravité de la figure, le moment statique par rapport à ces axes est nul. On dit que ce sont des *axes centraux*.

Si une figure peut être présentée sous la forme des figures élémentaires isolées (carrés, triangles, etc.) dont la position du centre de gravité est connue, le moment statique de la figure dans son ensemble peut s'obtenir comme la somme des moments statiques de ces figures élémentaires. Ceci est immédiat des propriétés de l'intégrale définie.

Si une figure possède un axe de symétrie, ce dernier passe toujours par le centre de gravité, ce qui fait que le moment statique de la figure par rapport à l'axe de symétrie est toujours nul.

Dans de nombreux cas au lieu des intégrales simples de la forme [IV.1] et (IV.4) il est plus commode de recourir aux intégrales doubles de la forme

$$S_x = \int_A y\mathrm{d}A = \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,; \qquad \text{[IV.1a]}$$

$$S_y = \int_A x\mathrm{d}A = \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,; \qquad \text{[IV.4a]}$$

Ici D est le domaine d'intégration.

Exemple IV.1. Déterminer la position du centre de gravité de la section représentée sur la figure IV.2, *a*.

Solution. Divisons la section en deux rectangles. Traçons des axes auxiliaires x et y. D'après les formules [IV.3] et [IV.5]

$x_C = S_y/A = (A_1x_1 + A_2x_2)/(A_1 + A_2) = (10 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 1 \cdot 3)/(10 + 4) = 1{,}22$ cm ;

$y_C = S_x/A = (A_1y_1 + A_2y_2)/(A_1 + A_2) = (10 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \cdot 0{,}5)/(10 + 4) = 3{,}72$ cm.

Ces coordonnées permettent de repérer le point C, centre de gravité de la section. Il repose sur la ligne qui joint les points C_1 et C_2 plus près de la figure dont l'aire est plus grande.

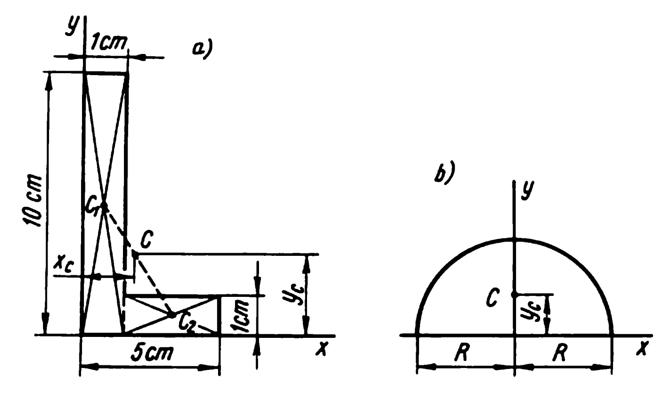


Fig. IV.2

Exemple IV.2. Calculer l'ordonnée du centre de gravité du demi-cercle (fig. IV.2, *b*).

Solution. Utilisons la formule

$$y_C = S_x/A = \iint y \, dx \, dy/A.$$

Calculons le numérateur en appliquant la formule de la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$:

$$S_x = \int_{-R}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy = \int_{-R}^{R} dx \left| \frac{y^2}{2} \right|_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3} R^3.$$

Calculons y_C compte tenu de $A = \pi R^2/2$:

$$y_C = S_x/A = 4R/(3\pi) \approx 0{,}424R.$$

§ 28. Moments d'inertie de la section

On appelle *moment d'inertie axial* ou *équatorial* la caractéristique géométrique égale numériquement à l'intégrale : par rapport à l'axe x

$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \iint_D y^2 \, dx \, dy \, ; \qquad \textbf{[IV.6]}$$

par rapport.à l'axe y

$$I_y = \int_A x^2 \, dA = \iint_D x^2 \, dx \, dy.$$

où y est la distance entre l'aire élémentaire dA et l'axe x (cf. fig. IV.1) ; x, la distance entre l'aire élémentaire et l'axe y ; D, le domaine d'intégration.

On appelle *moment d'inertie polaire* de la section la caractéristique géométrique déterminée par l'intégrale de la forme

$$I_p = I_0 = \int_A \rho^2 \, dA = \iint_D \rho^2 \, dx \, dy, \qquad \textbf{[IV.7]}$$

où ρ est la distance entre l'aire dA et le point (pôle) (cf. fig. IV.1) par rapport auquel on calcule le moment d'inertie.

Les moments axial et polaire sont toujours positifs. En effet, indépendamment du signe de la coordonnée de l'aire arbitraire, le terme correspondant est positif du fait que dans son expression figure le carré de cette coordonnée.

Le *moment d'inertie centrifuge* D_{xy} de la section est la caractéristique géométrique déterminée par l'intégrale de la forme

$$D_{xy} \equiv I_{xy} = \int_A xy \, dA = \iint_D xy \, dx \, dy, \qquad \textbf{[IV.8]}$$

où x, y sont les distances entre l'aire dA et les axes x et y.

Par unité du moment d'inertie on retient l'unité de longueur de puissance quatre.

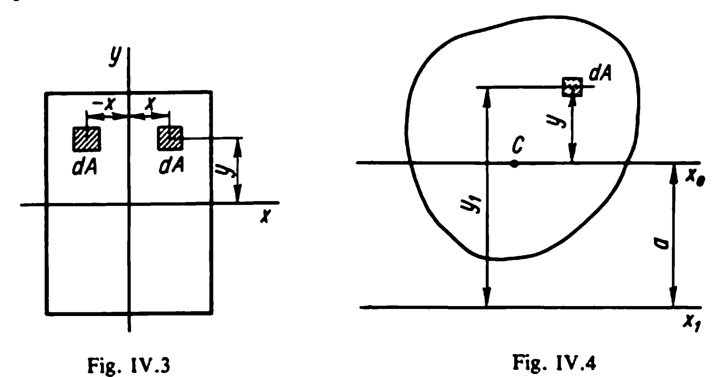


Fig. IV.3 Fig. IV.4

Le moment d'inertie centrifuge peut être positif, négatif ou, dans un cas particulier, nul.

Si les axes réciproquement perpendiculaires x et y, ou l'un de ces axes, constituent l'axe de symétrie de la figure, alors par rapport à ces axes le moment d'inertie centrifuge est nul. En effet, pour une figure symétrique on peut toujours dégager deux éléments de sa surface (fig. IV.3) tels que leurs ordonnées y soient les mêmes et leurs abscisses x égales en valeur mais

de signe opposé. En composant la somme des produits $xy\mathrm{d}A$ de tels éléments, c'est-à-dire en calculant l'intégrale [IV.8], on obtient zéro.

On montre sans peine que le moment d'inertie polaire par rapport à un point quelconque est égal à la somme des moments d'inertie axiaux par rapport à deux axes réciproquement perpendiculaires passant par ce point.

En effet, d'après la figure IV.1, $\rho^2 = x^2 + y^2$. En portant cette valeur de ρ^2 dans l'expression [IV.7], il vient

$$I_p = \int_A \rho^2\,\mathrm{d}A = \int_A (x^2 + y^2)\mathrm{d}A = \int_A x^2\,\mathrm{d}A + \int_A y^2\,\mathrm{d}A.$$

Par conséquent,

$$I_p = I_x + I_y. \qquad \text{[IV.9]}$$

§ 29. Relations entre les moments d'inertie par rapport aux axes parallèles

Déterminons le moment d'inertie d'une figure par rapport à un axe x_1 quelconque (fig. IV.4).

Supposons que x_0 soit l'axe central et le moment d'inertie I_{x_0} soit connu. D'après le dessin, $y_1 = a + y$. Donc,

$$I_{x_1} = \int_A (a + y)^2\,\mathrm{d}A = a^2 \int_A \mathrm{d}A + 2a \int_A y\mathrm{d}A + \int_A y^2\,\mathrm{d}A.$$

La première intégrale donne l'aire de la section ; la deuxième, qui est le moment statique par rapport à l'axe x_0 central, est nulle. La troisième est le moment d'inertie I_{x_0} de la figure par rapport à l'axe x_0. De la sorte,

$$I_{x_1} = I_{x_0} + Aa^2, \qquad \text{[IV.10]}$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe central, parallèle à l'axe donné, plus le produit de l'aire de la figure par le carré de la distance entre les axes.

La formule [IV.10] montre que le moment d'inertie par rapport à l'axe central est plus petit que le moment d'inertie par rapport à tout axe non central parallèle à l'axe central.

Le moment d'inertie par rapport à l'axe central est dit *central.*

§ 30. Moments d'inertie des sections simples

1. *Rectangle* (fig. IV.5, *a*). Calculons le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe x_0 passant par le centre de gravité parallèlement à la base. Adoptons pour $\mathrm{d}A$ l'aire d'une couche infiniment mince $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$. Il

vient

$$I_{x_0} = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2\, dy = bh^3/12.$$

Ainsi,

$$I_{x_0} = bh^3/12. \qquad \textbf{[IV.11]}$$

On obtient, d'une façon analogue,

$$I_{y_0} = b^3h/12. \qquad (IV.12)$$

2. *Cercle* (fig. IV.5, *b*). Déterminons d'abord le moment d'inertie polaire par rapport au centre du cercle

$$I_p = \int_A \rho^2\, dA.$$

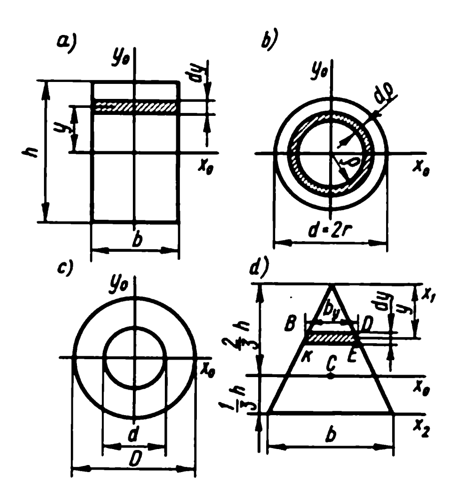


Fig. IV.5

Adoptons pour dA l'aire d'un anneau infiniment mince d'épaisseur dρ, c'est-à-dire dA = $2\pi\rho$dρ. Alors,

$$I_p = 2\pi \int_0^r \rho^3\, d\rho = \pi r^4/2.$$

Donc,

$$I_p = \pi r^4/2 = \pi d^4/32 \approx 0{,}1\, d^4. \qquad \textbf{[IV.13]}$$

Maintenant on trouve sans peine I_{x_0}. En effet, d'après la formule [IV.9] on a pour un cercle $I_p = 2\,I_{x_0} = 2I_{y_0}$, d'où

$$I_{x_0} = I_{y_0} = I_p/2 = \pi r^4/4 = \pi d^4/64 \approx 0{,}05\,d^4. \qquad \textbf{[IV.14]}$$

3. *Anneau* (fig. IV.5, *c*). Dans ce cas, le moment d'inertie axial est égal à la différence des moments d'inertie des cercles extérieur et intérieur

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \pi D^4/64 - \pi d^4/64 = 0{,}05D^4\,(1 - c^4), \qquad \text{(IV.15)}$$

où $c = d/D$.

D'une façon analogue, le moment d'inertie polaire

$$I_p = \pi D^4/32 - \pi d^4/32 = 0{,}1D^4\,(1 - c^4). \qquad \text{(IV.16)}$$

4. *Triangle* (fig. IV.5, *d*). Déterminons le moment d'inertie par rapport à l'axe x_1 parallèle à la base passant par le sommet du triangle :

$$I_{x_1} = \int_A y^2\,dA.$$

Adoptons comme dA l'aire d'un trapèze infiniment mince *KBDE*. On peut admettre que son aire est égale à celle d'un rectangle $dA = b_y\,dy$, où b_y est la longueur du rectangle.

La similitude des triangles permet de tirer aisément $b_y = yb/h$, d'où

$$I_{x_1} = \frac{b}{h}\int_0^h y^3\,dy = \frac{bh^3}{4}. \qquad \text{(IV.17)}$$

Déterminons le moment d'inertie par rapport à l'axe central; à cet effet, utilisons la formule [IV.10] :

$$I_{x_0} = I_{x_1} - Aa^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2}\left(\frac{2}{3}\,h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \qquad \text{(IV.18)}$$

Calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par la base:

$$I_{x_2} = I_{x_0} + Aa^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{1}{3}\,h\right)^2 = \frac{bh^3}{12}. \qquad \text{(IV.19)}$$

§ 31. Moments d'inertie des figures complexes

Le moment d'inertie d'une figure complexe est égal à la somme des moments d'inertie de ses parties constitutives :

$$I_x = I_x^{I} + I_x^{II} + I_x^{III} + \ldots \qquad \text{(IV.20)}$$

Ceci est immédiat des propriétés de l'intégrale définie

$$\int_A y^2\,dA = \int_{A_1} y^2\,dA + \int_{A_2} y^2\,dA + \ldots,$$

où $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Ainsi, pour calculer le moment d'inertie d'une figure complexe il faut la diviser en plusieurs figures simples, calculer les moments d'inertie de ces dernières, puis sommer les moments d'inertie ainsi obtenus.

Le théorème considéré est également vrai pour le moment d'inertie centrifuge.

Les moments d'inertie des sections des profilés (en H, en U, cornières, etc.) sont donnés par les tableaux des normes.

§ 32. Variation des moments d'inertie pendant la rotation des axes

Cherchons la relation entre les moments d'inertie par rapport aux axes x, y et les moments d'inertie par rapport aux axes x_1, y_1 tournés d'un angle α (fig. IV.6). Supposons que $I_x > I_y$ et l'angle α positif est compté à partir de l'axe x dans le sens antihoraire.

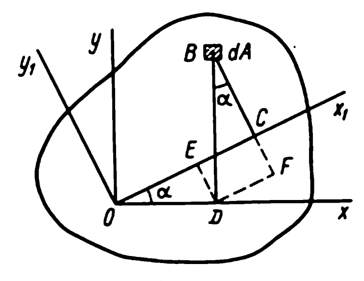


Fig. IV.6

Pour résoudre ce problème, établissons la relation entre les coordonnées de l'aire dA par rapport aux axes initiaux et aux axes tournés. D'après le dessin,

$$x_1 = \overline{OC} = \overline{OE} + \overline{EC} = \overline{OE} + \overline{DF} = \overline{OD}\cos\alpha + \overline{DB}\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad \text{(IV.21)}$$

$$y_1 = \overline{BC} = \overline{BF} - \overline{DE} = y\cos\alpha - x\sin\alpha. \quad \text{(IV.22)}$$

Maintenant déterminons les moments d'inertie par rapport aux axes x_1 et y_1 :

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2\,dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2\,dA =$$

$$= \int_A y^2\cos^2\alpha\,dA - 2\int_A xy\sin\alpha\cos\alpha\,dA + \int_A x^2\sin^2\alpha\,dA$$

ou

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2D_{xy} \sin \alpha \cos \alpha\,; \qquad \text{(IV.23)}$$

d'une façon analogue,

$$I_{y_1} = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 \, dA =$$

$$= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + 2D_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \qquad \text{(IV.24)}$$

$$D_{x_1 y_1} = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \, dA =$$

$$= I_x \sin 2\alpha/2 - I_y \sin 2\alpha/2 + D_{xy} \cos 2\alpha. \qquad \text{(IV.25)}$$

En additionnant (IV.23) et (IV.24), on obtient

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p. \qquad \text{(IV.26)}$$

En retranchant (IV.23) de (IV.24), il vient

$$I_{x_1} - I_{y_1} = (I_x - I_y) \cos 2\alpha - 2D_{xy} \sin 2\alpha. \qquad \text{(IV.27)}$$

La formule (IV.26) montre que la *somme des moments d'inertie par rapport aux axes réciproquement perpendiculaires quelconques ne change pas avec leur rotation.* La formule (IV.27) peut être utilisée pour le calcul du moment d'inertie centrifuge par rapport aux axes x et y d'après les moments d'inertie axiaux connus par rapport aux axes x, y et x_1, y_1.

§ 33. Axes d'inertie et moments d'inertie principaux

Lorsque l'angle α change, I_{x_1}, I_{y_1} et $D_{x_1 y_1}$ changent également. Cherchons la valeur de l'angle pour lequel les valeurs de I_{x_1} et I_{y_1} sont extrémales. A cet effet, calculons la dérivée première de I_{x_1} ou I_{y_1} par rapport à α et annulons-la

$$dI_{x_1}/d\alpha = -2I_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2I_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2D_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

ou

$$(I_y - I_x) \sin 2\alpha_0 - 2D_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2D_{xy}/(I_y - I_x). \qquad \text{[IV.28]}$$

Cette formule détermine la position de deux axes dont le moment d'inertie axial est maximal pour l'un et minimal pour l'autre. Ces axes sont dits *principaux*. Les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont dits *principaux*. Les valeurs de ces derniers se calculent d'après les formules (IV.23) et (IV.24) en y portant α_0 tiré de la formule [IV.28], tout en utili-

sant les formules connues de la trigonométrie pour les fonctions des angles doubles (cf. § 16).

Après des transformations on obtient la formule des moments d'inertie principaux :

$$J_{\substack{max \\ min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}. \qquad [IV.29]$$

D'après sa structure cette formule est analogue à celle des contraintes principales (II.36).

En analysant la dérivée seconde $d^2 I_{x_1}/d\alpha^2$, on peut établir que dans le cas considéré ($I_x > I_y$) le moment d'inertie est maximal (I_{max}) par rapport à l'axe principal tourné d'un angle α_0 par rapport à l'axe x, alors qu'il est minimal par rapport à l'autre axe perpendiculaire. Dans la plupart des cas la configuration des sections montre lequel des axes principaux correspond au moment d'inertie maximal.

Les moments d'inertie principaux peuvent être également déterminés, en plus de la formule [IV.29], par les formules (IV.23) et (IV.24). Il devient alors évident lequel est l'axe principal au moment d'inertie maximal et lequel est au moment d'inertie minimal.

Montrons maintenant que par rapport aux axes principaux le moment d'inertie centrifuge est nul. En effet, en annulant $D_{x_1 y_1}$ d'après la formule (IV.25), on obtient

$$[(I_x - I_y)/2] \sin 2\alpha_0 + D_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

d'où pour tg $2\alpha_0$ on obtient encore la formule [IV.28].

De la sorte, on appelle axes principaux les axes jouissant des propriétés suivantes :

1. Par rapport à ces axes le moment d'inertie centrifuge est nul.

2. Par rapport à ces axes les moments d'inertie ont des valeurs extrémales (maximale pour l'un et minimale pour l'autre).

Les axes principaux qui passent par le centre de gravité de la section sont dits *centraux principaux*.

Dans de nombreux cas leur position est déterminée d'emblée. Si la figure possède un axe de symétrie, cet axe est l'un des axes centraux principaux, le deuxième axe passe par le centre de gravité de la section perpendiculairement au premier. Ceci résulte du fait que par rapport à l'axe de symétrie et à un axe quelconque qui lui est perpendiculaire, le moment d'inertie centrifuge est nul.

En utilisant les formules (IV.23) à (IV.25) on peut montrer que si deux moments d'inertie centraux principaux de la section sont égaux entre eux, tout axe central de cette section est principal et tous les moments d'inertie centraux principaux sont identiques (cercle, carré, hexagone, triangle équilatéral).

En effet, supposons que pour une section quelconque les axes x et y soient les axes centraux principaux et, de plus, $I_x = I_y$. Alors, les formules (IV.23) et (IV.24) entraînent que $I_x = I_y = I_{x_1} = I_{y_1}$, et les formules (IV.25) montrent que pour une telle figure $D_{x_1y_1} = 0$, c'est-à-dire que les axes x_1 et y_1 quelconques sont les axes d'inertie centraux principaux.

§ 34. Relation entre les moments d'inertie centrifuges par rapport à deux systèmes d'axes parallèles

Supposons que les axes x_0y_0 soient des axes centraux (fig. IV.7) et le moment d'inertie $D_{x_0y_0}$ soit connu. Cherchons le moment d'inertie centrifuge par rapport aux axes x_1 et y_1. D'après le dessin

$$x_1 = x_0 + b\,;\, y_1 = y_0 + a.$$

Donc,

$$D_{x_1y_1} = \int_A x_1\, y_1\, \mathrm{d}A = \int_A (x_0 + b)(y_0 + a)\, \mathrm{d}A =$$

$$= \int_A x_0y_0\, \mathrm{d}A + b\int_A y_0\, \mathrm{d}A + a\int_A x_0\, \mathrm{d}A + \int_A ab\, \mathrm{d}A \quad \text{(IV.30)}$$

ou

$$D_{x_1y_1} = D_{x_0y_0} + Aab. \quad \textbf{[IV.30a]}$$

La deuxième et la troisième intégrales du deuxième membre de l'égalité (IV.30), qui sont des moments statiques par rapport aux axes centraux, sont nulles.

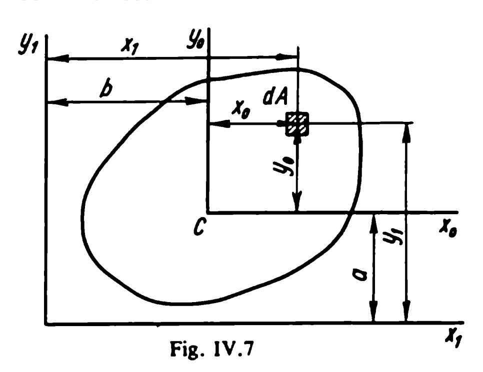


Fig. IV.7

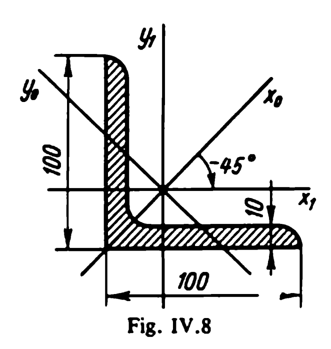


Fig. IV.8

Ainsi, *le moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes réciproquement perpendiculaires, parallèles aux axes centraux est égal au moment d'inertie centrifuge par rapport à ces axes centraux plus le produit de l'aire de la figure par les coordonnées de son centre de gravité par rapport aux axes nouveaux.*

Si les axes x_0 et y_0 sont les axes centraux principaux, alors, par rapport à ces axes $D_{x_0y_0} = 0$ et la formule [IV.30a] devient plus simple

$$D_{x_1y_1} = Aab. \qquad \text{(IV.31)}$$

Pour une figure complexe composée de n figures simples

$$D_{x_1y_1} = \sum_1^n A_i a_i b_i \qquad \text{(IV.32)}$$

(à condition que les axes centraux propres de chaque figure soient des axes principaux).

Exemple IV.3. Calculer le moment d'inertie centrifuge d'une cornière 100 × 100 × 10 mm par rapport aux axes centraux x_1 et y_1 (fig. IV.8).

Solution. Utilisons la formule (IV.25) et déterminons le moment d'inertie centrifuge d'après les moments d'inertie par rapport aux axes centraux principaux x_0 et y_0 tirés des tableaux des normes :

$$I_{x_0} = 284 \text{ cm}^4 = 284 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \quad I_{y_0} = 74{,}1 \text{ cm}^4 = 74{,}1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 ;$$

$$D_{x_1y_1} = \frac{(I_{x_0} - I_{y_0}) \sin 2\alpha}{2} + D_{x_0y_0} \cos 2\alpha.$$

x_0 et y_0 étant des axes centraux principaux (x_0 est l'axe de symétrie de la figure), le moment d'inertie $D_{x_0y_0}$ est nul. L'angle $\alpha = -45°$ du fait que les axes x_1 et y_1 par rapport auxquels on calcule le moment d'inertie centrifuge sont tournés dans le sens horaire par rapport aux axes x_0 et y_0. Donc,

$$D_{x_1y_1} = \frac{284 - 74{,}1}{2}(-1) = -104{,}95 \text{ cm}^4 = -104{,}95 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.$$

Exemple IV.4. Calculer les moments d'inertie centraux principaux de la section de la figure IV.9.

Solution. 1. Déterminons les coordonnées du centre de gravité et à cet effet traçons les axes auxiliaires x_1 et y_1, puis divisons la section en deux figures, dont le profilé en U *I* et la cornière *II*, pour lesquels toutes les données nécessaires sont fournies par les tableaux des normes (tableau IV.1).

Les coordonnées du centre de gravité de la section sont déterminées d'après les formules

$$x_0 = (A_1x_1 + A_2x_2)/(A_1 + A_2) ;$$
$$y_0 = (A_1y_1 + A_2y_2)/(A_1 + A_2),$$

où A_1 est l'aire de la première figure (profilé en U) ; x_1, la distance entre l'axe y_1 et le centre de gravité du profilé en U (ici $x_1 = 8{,}0 - 2{,}28 = 5{,}72$ cm, où 8,0 cm est la largeur de l'aile du profilé en U et $z_0 = 2{,}28$ cm, la distance entre le centre de gravité du profilé en U et l'âme) ; A_2, l'aire de la section de la cornière ; x_2, la distance entre le centre de gravité de la cornière et l'axe y_1 : $x_2 = 8{,}0 + 2{,}83 = 10{,}83$ cm.

La distance entre l'axe x_1 et le centre de gravité du profilé en U est égale à $y_1 = 10$ cm, puisque la hauteur du profilé en U est de 20 cm ; la distance entre l'axe x_1 et le centre de gravité de la cornière est égale à $y_2 = 2{,}83$ cm. En portant dans les formules les valeurs numériques,

on obtient

$$x_0 = \frac{25{,}2 \cdot 5{,}72 + 19{,}2 \cdot 10{,}83}{25{,}2 + 19{,}2} = 7{,}93 \text{ cm} ;$$

$$y_0 = \frac{25{,}2 \cdot 10 + 19{,}2 \cdot 2{,}83}{25{,}2 + 19{,}2} = 6{,}9 \text{ cm}.$$

D'après ces données repérons le point O, centre de gravité de la section, et traçons les axes centraux auxiliaires x et y. Alors O doit reposer sur la ligne reliant les centres de gravité du profilé en U et de la cornière.

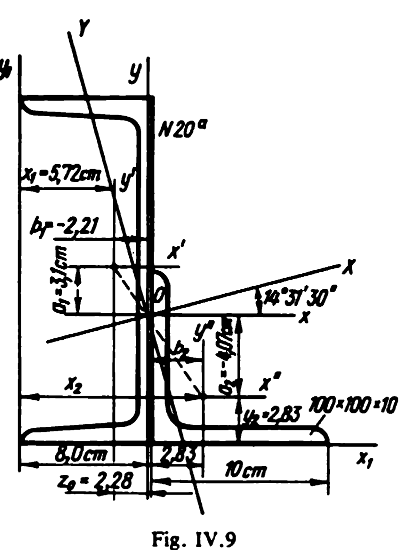


Fig. IV.9

Tableau IV.1

Figure	Aire de la section A, cm²	Position du centre de gravité z_0, cm	Moments d'inertie par rapport aux axes centraux propres, cm⁴	
			horizontal	vertical
Profilé en U N 20ᵃ	25,2	2,28	1670	139
Cornière 100 × × 100 × 10	19,2	2,83	179	179

2. Calculons les moments d'inertie par rapport aux axes x et y :

$$I_x = I_x^{I} + I_x^{II} ; \quad I_y = I_y^{I} + I_y^{II}.$$

Pour calculer le moment d'inertie I_x du profilé en U par rapport à l'axe x utilisons la formule [IV.10] :

$$I_x^{I} = 1670 + 25{,}2(+3{,}10)^2 = 1912 \text{ cm}^4 = 1912 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4,$$

où $I_{x'} = 1670\ \text{cm}^4 = 1670 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$ est le moment d'inertie du profilé en U par rapport à l'axe central propre x'; $A = 25{,}2\ \text{cm}^2$, l'aire de la section du profilé en U ; $a_1 = 10 - 6{,}90 = 3{,}10$ cm, la distance entre l'axe x et le centre de gravité du profilé en U (prise avec le signe plus, le centre de gravité du profilé en U se trouvant plus haut que l'axe x).

D'une façon analogue, le moment d'inertie de la cornière par rapport à l'axe x:

$$I_x^{II} = 179 + 19{,}2(-4{,}07)^2 = 497\ \text{cm}^4 = 497 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4,$$

où $I_{x''} = 179\ \text{cm}^4 = 179 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$ est le moment d'inertie de la cornière par rapport à l'axe central propre x''; $A = 19{,}2\ \text{cm}^2$, l'aire de la section de la cornière; $a_2 = 2{,}83 - 6{,}90 = -4{,}07$ cm, la distance entre l'axe x et le centre de gravité de la cornière. Le signe moins est pris du fait que le centre de gravité de la cornière se trouve plus bas que l'axe x. Le moment d'inertie global de la section par rapport à l'axe x vaut

$$I_x = 1912 + 497 = 2409\ \text{cm}^4 = 2409 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4.$$

Le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe y se calcule exactement de la même façon.

Pour le profilé en U

$$I_y^{I} = 139 + 25{,}2(-2{,}21)^2 = 262{,}5\ \text{cm}^4 = 262{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4,$$

où $b_1 = 5{,}72 - 7{,}93 = -2{,}21$ cm est la distance entre l'axe y et le centre de gravité du profilé en U. Le signe moins est retenu du fait que le centre de gravité se trouve à gauche de l'axe y.

Pour la cornière,

$$I_y^{II} = 179 + 19{,}2\,(2{,}9)^2 = 340{,}5\ \text{cm}^4 = 340{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4,$$

où $b_2 = 8 + 2{,}83 - 7{,}93 = 2{,}90$ cm est la distance entre l'axe y et le centre de gravité de la cornière.

Le moment d'inertie global de la section par rapport à l'axe y est

$$I_y = 262{,}5 + 340{,}5 = 603\ \text{cm}^4 = 603 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4.$$

Calculons le moment d'inertie centrifuge par rapport aux axes x et y. A cet effet, utilisons la formule [IV.30a]. Le profilé en U possédant un axe de symétrie horizontal x', les axes centraux propres du profilé x' et y' sont les axes principaux ; donc, pour le profilé le premier terme de la formule [IV.30a] est nul.

Pour la cornière les axes centraux propres sont parallèles aux axes x et y, c'est-à-dire que les axes x'' et y'' ne sont pas principaux ; il s'ensuit que pour la cornière le premier terme de la formule [IV.30a] n'est pas nul. Il convient de le calculer de la même façon qu'il en a été dans l'exemple IV.3. On y a obtenu $D_{x''y''} = -104{,}95\ \text{cm}^4$. Donc, le moment d'inertie centrifuge de toute la section est

$$D_{xy} = 25{,}2\,(+3{,}10)(-2{,}21) - 104{,}95 + 19{,}2\,(-4{,}07)(2{,}90) =$$
$$= -172{,}0 - 104{,}95 - 225 = -501{,}9\ \text{cm}^4 = -501{,}9 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4.$$

3. Déterminons d'après la formule [IV.28] la position des axes principaux :

$$\text{tg}\ 2\alpha_0 = 2D_{xy}/(I_y - I_x) = 2(-501{,}95)/(603 - 2409) = 0{,}555\ ;$$
$$2\alpha_0 = 29°03'; \quad \alpha_0 = 14°31'30''.$$

Portons cet angle en le comptant dans le sens antihoraire et menons les axes centraux principaux X et Y. Si tg $2\alpha_0$ et α_0 s'obtenaient avec le signe moins, les axes centraux principaux seraient tournés par rapport aux axes x et y dans le sens horaire.

4. Calculons d'après la formule [IV.29] les moments d'inertie centraux principaux :

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{2409 + 603}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2409 - 603)^2 + 4 \cdot 501{,}95^2} = 1506 \pm 1030.$$

Donc,

$$I_{max} = 2536 \text{ cm}^4 = 2536 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \, ; \quad I_{min} = 476 \text{ cm}^4 = 476 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.$$

Etant donné que $I_x > I_y$, I est maximal par rapport à l'axe principal X et minimal par rapport à l'axe Y.

Pour vérifier utilisons les formules (IV.23) et (IV.24) :

$$I_X = 2409 \cdot 0{,}937 + 603 \cdot 0{,}0625 + 501{,}95 \cdot 0{,}485 = 2536 \text{ cm}^4 = 2536 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \, ;$$

$$I_Y = 2409 \cdot 0{,}0625 + 603 \cdot 0{,}937 - 501{,}95 \cdot 0{,}485 = 476 \text{ cm}^4 = 476 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4,$$

où $\cos^2\alpha = \cos^2(14°31'30'') = 0{,}968^2 = 0{,}937$; $\sin^2 \alpha = \sin^2 (14°31'30'') = 0{,}25^2 = 0{,}0625$; $\sin 2\alpha = \sin 29°03' = 0{,}485$.

Exemple IV.5. Calculer le moment d'inertie centrifuge d'un triangle rectangle par rapport aux axes x et y, x_0 et y_0 (fig. IV.10).

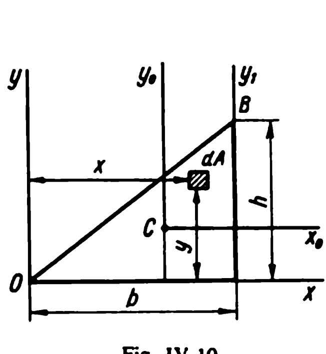


Fig. IV.10

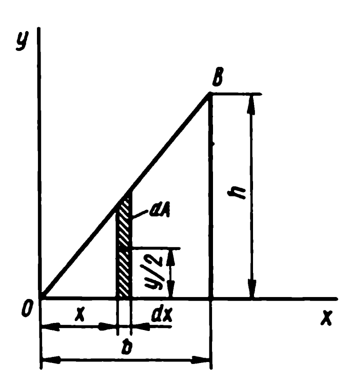


Fig. IV.11

Solution. Le moment d'inertie centrifuge se calcule à l'aide de l'intégrale double :

$$D_{xy} = \int\int xy \, dx \, dy.$$

L'équation de la droite OB : $y = hx/b$; donc

$$D_{xy} \equiv I_{xy} = \int_0^b x \, dx \int_0^{hx/b} y \, dy = b^2h^2/8.$$

Le moment centrifuge par rapport aux axes centraux x_0 et y_0 se calcule d'après la formule

$$D_{x_0y_0} = D_{xy} - Aab = \frac{b^2h^2}{8} - \frac{bh}{2}\left(-\frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{h}{3}\right) = \frac{b^2h^2}{72}.$$

Il en est de même par rapport aux axes x et y_1 qui coïncident avec les cathètes du triangle

$$D_{xy_1} = D_{x_0y_0} + Aab = \frac{b^2h^2}{72} + \frac{bh}{2}\left(-\frac{b}{3}\right)\frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{24}.$$

La solution de cet exemple en intégrales simples serait de la forme :

$$D_{xy} = \int_A xy \, \mathrm{d}A,$$

où x et y sont les coordonnées de l'aire élémentaire $\mathrm{d}A$.

Pour aire élémentaire on adopte l'aire de la colonne hachurée (fig. IV.11) $\mathrm{d}A = y \, \mathrm{d}x$.

La distance entre le centre de gravité de cette colonne et l'axe x est égale à $y/2$. Avec $y = hx/b$ on obtiendrait alors l'intégrale :

$$D_{xy} = \int_0^b x\frac{y}{2} \, y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^b y^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{b^2}\int_0^b x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{b^2h^2}{8}.$$

CHAPITRE V

TORSION*

§ 35. Construction des diagrammes des moments de torsion

Une barre subit une *torsion* si ses sections droites sont sollicitées par des moments de torsion, c'est-à-dire par les moments qui reposent dans le plan de la section. Ordinairement les moments de torsion T apparaissent sous l'action des moments extérieurs T_e (fig. V.1). Les moments extérieurs sont transmis à l'arbre généralement au droit où il porte les poulies, les engrenages, etc. Toutefois, l'effort tranchant déplacé par rapport à l'axe de la

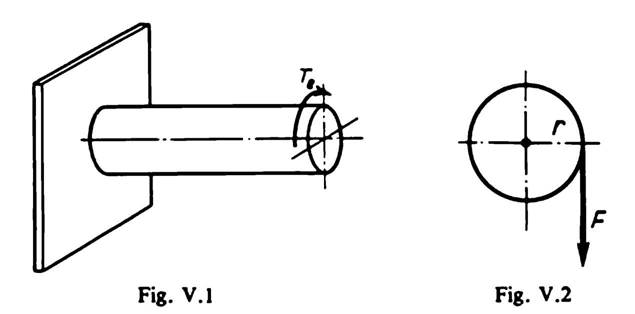


Fig. V.1 Fig. V.2

barre donne également lieu aux moments de torsion (fig. V.2), mais dans ces cas les sections droites subissent également d'autres efforts intérieurs que sont les efforts tranchants et les moments fléchissants.

Les barres entraînées en rotation et soumises à la torsion s'appellent *arbres*.

Au lieu de la représentation axonométrique nous employerons la représentation plane qui est plus simple. Les moments de torsion extérieurs et intérieurs sont visualisés par des lignes munies de deux ronds dont l'un renferme un point pour désigner l'origine de la flèche pointée vers nous, et

---

* Dans le présent chapitre nous décrivons le calcul à la torsion sous l'action d'une charge statique. Le calcul des arbres sollicités par des moments variables dans le temps (calcul à l'endurance) est examiné au chapitre XII.

l'autre, une petite croix, pour désigner l'extrémité de la flèche pointée dans le sens contraire, c'est-à-dire à partir de nous (fig. V.3).

Pour calculer les moments de torsion T engendrés dans les sections de l'arbre par l'action des couples extérieurs ou de l'effort tranchant, appliquons la méthode des sections. Pratiquons en pensée la coupe de la barre (fig. V.3), par exemple suivant $a—a$, rejetons une partie, dans notre cas la partie gauche, et considérons l'équilibre de la partie droite restante.

Remplaçons l'interaction des parties de la barre par le moment de torsion T qui équilibre le couple extérieur T_e. Pour l'équilibre de la partie sectionnée, il faut que la somme algébrique de tous les moments que subit cette partie soit nulle. Il s'ensuit que $T = T_e$. Si la partie sectionnée subit plusieurs moments extérieurs, des raisonnements analogues montrent que le *moment de torsion dans la section est égal numériquement à la somme algébrique des moments de torsion extérieurs appliqués d'un côté de la section.*

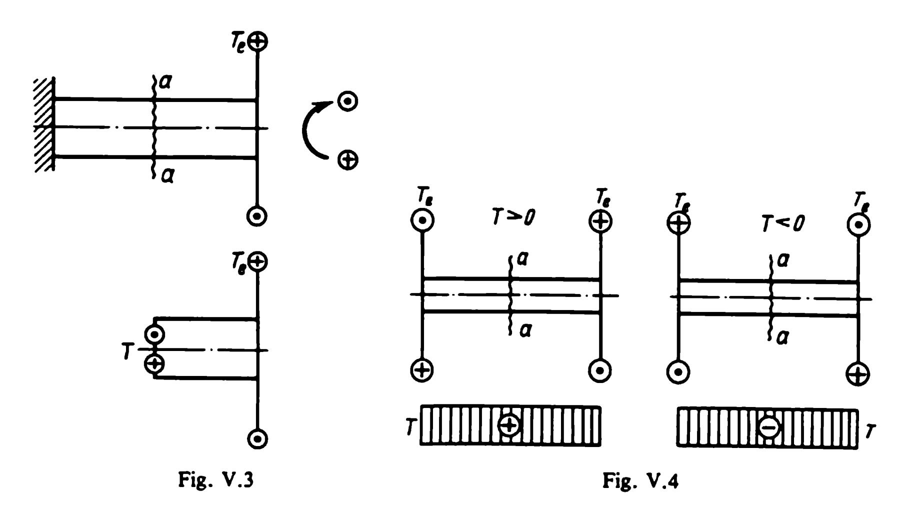


Fig. V.3

Fig. V.4

Pour visualiser la distribution et la variation des moments de torsion le long de la barre, on établit des diagrammes. Leur construction est parfaitement analogue à celle des diagrammes des efforts normaux dans le cas de la traction ou de la compression. Pour construire les diagrammes il faut s'entendre sur la règle des signes. Dans le cas des moments de torsion il n'existe pas de règle universellement reconnue. On peut donc retenir une règle quelconque. Il importe seulement de ne pas s'en écarter pendant l'établissement du diagramme considéré.

Adoptons la règle (fig. V.4) suivant laquelle le moment de torsion dans la section $a—a$ est *positif* lorsque le moment extérieur tourne la partie sectionnée dans le sens antihoraire si on regarde cette partie du côté de la section. Mais si le moment extérieur tourne la partie rejetée dans le sens horai-

re (lorsqu'on la regarde du côté de la section), le moment de torsion est considéré comme *négatif*.

Explicitons la construction du diagramme de torsion sur l'exemple suivant (fig. V.5). Examinons l'arbre *CD* qui repose sur les paliers *B* et *A* en équilibre sous l'action des moments appliqués aux sections *E*, *K* et *L*. En pratiquant la section *a—a* quelque part dans le tronçon *DL* et en considérant l'équilibre de la partie droite rejetée, nous voyons que $T = 0$. Si nous

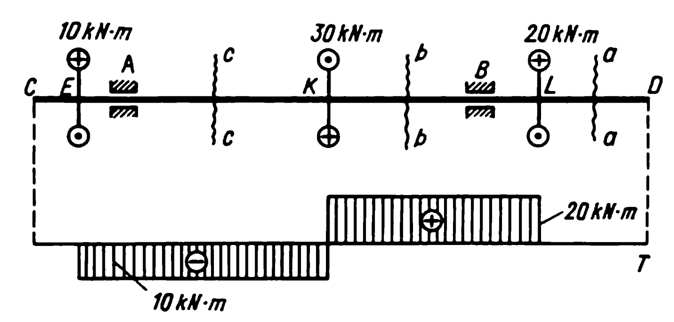


Fig. V.5

réalisons ensuite la section *b—b* en un endroit quelconque du tronçon *LK*, la condition d'équilibre de la partie droite par rapport à la section permet d'obtenir $T = 20$ kN · *m*.

Admettons que conformément à la loi des signes adoptée le moment est positif. En pratiquant la section *c—c* dans le tronçon *KE*, nous obtenons à partir de la condition d'équilibre de la partie droite $20 - 30 - T = 0$, d'où $T = -10$ kN · m.

Le diagramme obtenu a la forme de deux rectangles. Il importe de noter qu'aux points d'application des moments extérieurs les ordonnées du diagramme changent en saut de la grandeur du moment extérieur appliqué en cet endroit.

Si l'on donne les efforts tranchants qui provoquent la torsion de la barre (cf. fig. V.2), on calcule au préalable les moments de torsion extérieurs créés par ces forces. Dans le cas représenté sur la figure V.2 le moment de torsion extérieur dû à la force *F* est $T_e = Fr$. Après le calcul des moments extérieurs, nous déterminons les moments de torsion intérieurs et construisons des diagrammes de la façon indiquée dans ce qui précède.

§ 36. Détermination des contraintes subies par les barres à section droite circulaire

Les moments de torsion décrits précédemment ne sont que les résultantes des forces intérieures. En fait, une section droite sollicitée à la traction subit des contraintes tangentielles intérieures à action continue, que nous allons soumettre à l'étude.

Voici d'abord les résultats des expériences. Si à la surface d'une barre de section circulaire on trace un réseau rectangulaire, après la déformation (fig. V.6) :

1) le réseau rectangulaire se transforme en un réseau de parallélogrammes qui témoigne de la présence des contraintes tangentielles dans les sections droites, et d'après la loi de parité des contraintes tangentielles, également dans les sections longitudinales ;

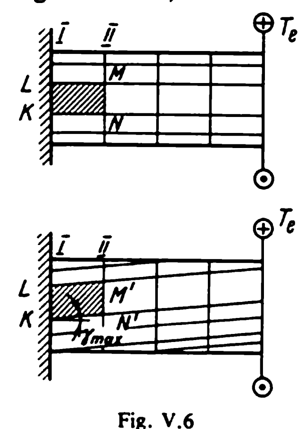


Fig. V.6

2) les distances entre les cercles, par exemple entre *I* et *II*, ne changent pas. La longueur de la barre et son diamètre ne changent pas. On suppose donc, que chaque section droite tourne dans son plan d'un certain angle comme un ensemble rigide (*hypothèse des sections planes et rigides*), on tire de cette hypothèse que les rayons de toutes les sections droites tournent d'un angle égal tout en restant rectilignes.

En vertu de ce qui vient d'être dit, on peut admettre qu'en torsion les sections droites d'une barre ne sont sollicitées que par des contraintes tangentielles, c'est-à-dire que l'état de contrainte aux points de la barre soumise à la torsion est un cisaillement pur.

Les formules obtenues à partir de cette hypothèse sont confirmées par l'expérience. Le point *D* se déplace suivant l'arc *DD'*, le point *C*, suivant l'arc *CC'* (fig. V.7).

Pour établir la loi de distribution des contraintes tangentielles suivant la section droite d'une barre soumise à la torsion (fig. V.6 et V.8), examinons de plus près ses déformations. La figure V.8 représente à une plus grande échelle la partie de la barre entre les sections *I* et *II* et montre le côté *KN* de l'élément *KLMN* (cf. fig. V.6).

L'angle de cisaillement de l'élément *KLMN* qui repose à la surface de la barre est égal au quotient du segment *NN'* par la longueur de l'élément d*z* (fig. V.8) :

$$\gamma_{max} = r\, d\vartheta/dz. \qquad (V.1)$$

En extrayant en pensée de la partie envisagée de la barre un cylindre de rayon arbitraire ρ et en reprenant les mêmes raisonnements, on obtient l'angle de cisaillement de l'élément à la distance ρ de l'axe :

$$\gamma = \rho \, \mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}z. \qquad (V.2)$$

En vertu de la loi de Hooke, on a pour le cisaillement

$$\tau = G\gamma = G\rho \, \mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}z. \qquad (V.3)$$

On voit qu'*en torsion la déformation de cisaillement et les contraintes tangentielles sont directement proportionnelles à la distance jusqu'au centre de gravité de la section.*

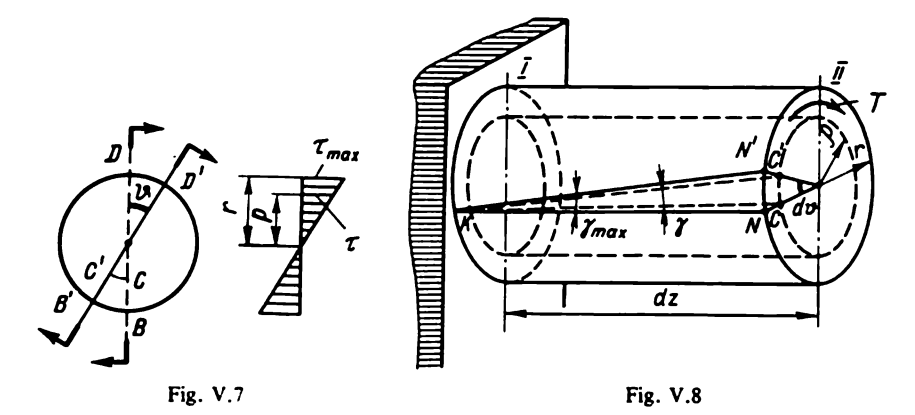


Fig. V.7 Fig. V.8

Le diagramme des contraintes tangentielles suivant la section droite de la barre est représenté sur la figure V.7 à droite.

Au centre de gravité d'une section circulaire les contraintes tangentielles sont nulles. Elles sont maximales aux points de la section voisins de la surface de la barre.

En connaissant la loi de distribution des contraintes tangentielles, on les calcule facilement à partir de la condition que le moment de torsion est la résultante du moment des contraintes tangentielles subies par la section

$$T = \int_A \tau\rho \, \mathrm{d}A, \qquad (V.4)$$

où $\tau\rho \, \mathrm{d}A$ est le moment de torsion élémentaire des forces intérieures appliquées à l'aire $\mathrm{d}A$.

En portant dans (V.4) la valeur des contraintes d'après la formule (V.3), on obtient

$$T = G \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}z} \int_A \rho^2 \mathrm{d}A. \qquad (V.5)$$

En tenant compte que

$$\int_A \rho^2 \, dA = I_p, \qquad \text{(V.6)}$$

où I_p est le moment d'inertie polaire de la section, il vient

$$d\vartheta/dz = T/(GI_p). \qquad \text{(V.7)}$$

En portant la valeur de $d\vartheta/dz$ dans la formule (V.3), on a

$$\tau = T\rho/I_p. \qquad \text{(V.8)}$$

Dans le cas particulier où la barre subit seulement un moment de torsion extérieur T_e (fig. V.9), on obtient à partir de la condition d'équilibre de la partie sectionnée : $T = T_e$.

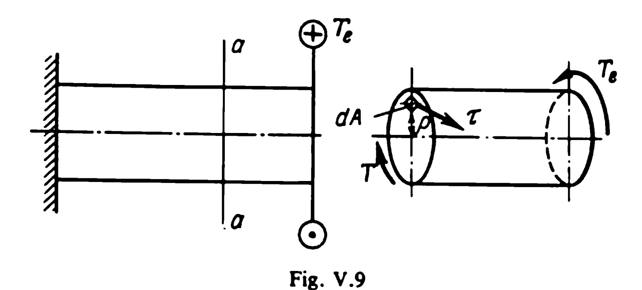


Fig. V.9

Ainsi, la formule définitive des contraintes tangentielles en torsion s'écrit

$$\tau = T\rho/I_p. \qquad \text{[V.9]}$$

Cette formule montre qu'aux points équidistants du centre de la section les contraintes τ sont égales.

Les contraintes sont maximales aux points du contour de la section

$$\tau_{max} = Tr/I_p = T/W_p, \qquad \text{(V.10)}$$

où

$$W_p = I_p/r. \qquad \text{(V.11)}$$

La caractéristique géométrique W_p est le *couple de résistance polaire* ou le *couple de réaction à la torsion*.

Pour une section circulaire pleine, on a

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3. \qquad \text{[V.12]}$$

Pour une section annulaire,

$$W_p = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0{,}2D^3(1 - c^4), \quad \text{(V.13)}$$

où $c = d/D$.

La condition de la résistance statique de l'arbre à la torsion est de la forme

$$\tau_{max} = T/W_p \leqslant \tau_{adm}. \quad \text{[V.14]}$$

Ici τ_{adm} est la contrainte tangentielle admissible.

Sous l'action d'une charge statique on adopte (sans tenir compte de la concentration des contraintes et d'autres facteurs qui altèrent la résistance) $\tau_{adm} = (0{,}5 \text{ à } 0{,}6)\sigma_{adm}$.

En plus de la vérification à la résistance, les autres quantités étant connues, on peut également d'après cette formule choisir le diamètre de l'arbre ou calculer le moment de torsion admissible.

Si on tient compte que pour une section circulaire pleine $W_p \approx 0{,}2\,d^3$, il vient

$$d = \sqrt[3]{T/(0{,}2\tau_{adm})} = 1{,}72\sqrt[3]{T/\tau_{adm}}. \quad \text{(V.15)}$$

D'après cette formule on calcule le diamètre de l'arbre à partir de la condition de la résistance.

Le moment de torsion rendu admissible par les conditions de la résistance est déterminé d'après la formule

$$T_{adm} = W_p\,\tau_{adm}. \quad \text{(V.16)}$$

Les contraintes tangentielles interviennent non seulement dans les sections droites de la barre, mais aussi, en vertu de la loi de la parité des contraintes tangentielles, dans ses sections longitudinales (fig. V.10).

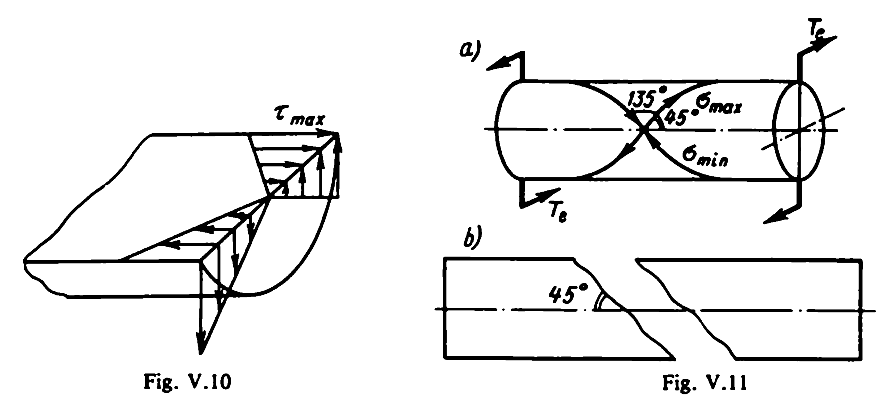


Fig. V.10

Fig. V.11

Pour ce qui est des sections obliques, elles subissent aussi bien les contraintes normales que tangentielles. Ces contraintes peuvent se calculer d'après les formules du chapitre II.

Les contraintes qui présentent le plus grand intérêt sont les contraintes principales. Pour les calculer on peut recourir à la formule (II.36) en y posant $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$. On établit de cette façon que $\sigma_1 = \sigma_{max} = \tau$ et $\sigma_3 = \sigma_{min} = -\tau$, la première étant une traction et la deuxième, une compression. La formule [II.35] permet de calculer l'angle d'inclinaison des aires principales : $\alpha_0' = 45°$ et $\alpha_0'' = 135°$ (fig. V.11, *a*).

Les expériences montrent que les matériaux fragiles, par exemple, la fonte, sollicités à la torsion, rompent suivant un plan (plus exactement suivant une surface hélicoïdale) incliné à l'axe de l'arbre à 45° (fig. V.11, *b*), c'est-à-dire suivant les plans subissant des forces de traction maximales.

Par conséquent, en torsion tous les points de l'arbre, sauf ceux de son axe (où, en général, les contraintes ne se manifestent pas), subissent l'état de contrainte biaxial ou le *cisaillement pur*. En torsion le matériau près de la surface de l'arbre est sollicité plus fort que près de l'axe. Ainsi, l'état de contrainte ***n'est pas homogène***. Si on soumet à la torsion un tube à parois minces, on peut admettre que pratiquement tous les points de ses parois subissent des contraintes égales, c'est-à-dire que dans ce cas l'état de contrainte est *homogène*. Les essais à la torsion de tels tubes sont généralement utilisés pour l'étude du cisaillement pur et, notamment, pour l'établissement de la limite d'écoulement $\tau_é$ au cisaillement.

§ 37. Déformations et déplacements des arbres en torsion

Pour déterminer les déformations d'un arbre soumis à la torsion appliquons la formule (V.7) :

$$d\vartheta = T\,dz/(GI_p). \tag{V.17}$$

La déformation de l'arbre sur la longueur z (angle de rotation réciproque des sections) vaut

$$\vartheta = \int_0^z T\,dz/(GI_p). \tag{V.18}$$

Si le moment de torsion et la quantité GI_p, appelée ***rigidité de l'arbre à la torsion***, sont constants, dans tout le domaine d'intégration

$$\vartheta = Tz/(GI_p). \tag{V.19}$$

D'une façon analogue, on obtient pour un arbre de longueur l

$$\vartheta = Tl/(GI_p). \qquad \textbf{[V.20]}$$

La structure de cette formule est analogue à celle des déformations à la traction-compression.

L'angle d'enroulement par unité de longueur s'appelle *angle de torsion relatif*. Il vaut

$$\gamma = \vartheta/l = T/(GI_p). \qquad (V.21)$$

Pour assurer la rigidité requise il faut que l'angle de torsion relatif maximal ne dépasse pas sa valeur admissible, c'est-à-dire

$$\gamma = T/(GI_p) \leqslant \gamma_{adm}. \qquad [V.22]$$

Cette formule exprime la *condition de rigidité* de l'arbre à la torsion. Ici γ_{adm} est l'angle de torsion relatif admissible en radians par unité de longueur de l'arbre.

Dans la plupart des cas, cet angle est donné en degrés par 1 m de longueur ; alors, au lieu de la formule [V.22] on obtient

$$\gamma = \frac{180}{\pi} \frac{T}{GI_p} \leqslant \gamma_{adm}. \qquad (V.23)$$

L'angle γ_{adm} est choisi en fonction de la destination de l'arbre et de ses dimensions. On recommande pour les arbres moyens un angle de torsion égal à 0,5° par 1 m de longueur. La condition (V.23) permet de calculer le diamètre de l'arbre d'après la rigidité donnée. En retenant que $I_p \approx \approx 0,1\, d^4$, on a

$$d = \sqrt[4]{\frac{180T}{\pi G 0,1 \gamma_{adm}}}. \qquad (V.24)$$

§ 38. Construction des diagrammes des déplacements angulaires en torsion

L'existence des formules des déformations et la connaissance des conditions de la fixation des barres rendent facile l'établissement des déplacements angulaires des sections et la construction des diagrammes de ces déplacements. S'il s'agit d'un arbre, c'est-à-dire d'une barre en rotation, qui ne possède pas de sections fixes, le diagramme des déplacements angulaires est dressé pour une section quelconque considérée comme fixe par convention.

Voici un exemple concret (fig. V.12, *a*). La figure V.12, *b* représente le diagramme de T.

Admettons qu'au point A la section est fixe. Déterminons comment tourne la section B par rapport à la section A.

D'après la formule [V.20], on trouve

$$\vartheta_{BA} = T_{AB} l_{AB}/(GI_p),$$

où T_{AB} est le moment de torsion dans le tronçon AB ; l_{AB}, la longueur de ce tronçon.

Retenons pour les angles de rotation des sections la loi des signes suivante : les angles ϑ sont considérés positifs si la section tourne dans le sens antihoraire (de droite à gauche si on regarde le long de l'axe). Dans ce cas ϑ_{BA} est positif. Portons l'ordonnée de ϑ_{BA} à l'échelle retenue (fig. V.12, *c*).

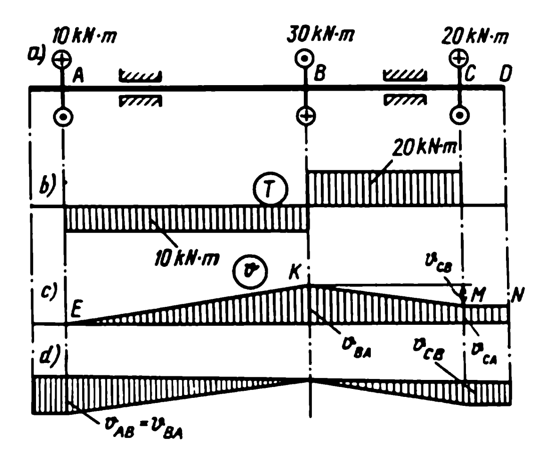


Fig. V.12

Relions par une droite le point *K* obtenu au point *E*, du fait que dans le tronçon *AB* les angles changent d'après la loi d'une droite [cf. formule (V.19), où l'abscisse *z* de la section figure au premier degré]. Calculons maintenant l'angle de rotation de la section *C* par rapport à la section *B*. Compte tenu de la règle des signes adoptée, il vient

$$\vartheta_{CB} = -T_{BC}l_{BC}/(GI_p).$$

La section *B* n'étant pas fixe, l'angle de rotation de la section *C* par rapport à la section *A* est

$$\vartheta_{CA} = \vartheta_{CB} + \vartheta_{BA} = -\frac{T_{BC}l_{BC}}{GI_p} + \vartheta_{BA}.$$

L'angle de torsion ϑ_{CA} peut être positif, négatif ou, dans un cas particulier, nul.

Supposons que dans notre cas l'angle ϑ_{CA} soit positif. Alors, en le portant à l'échelle retenue en haut suivant l'axe du diagramme, on obtient le point *M*. En reliant le point *M* au point *K* on obtient le graphique des angles de torsion ϑ dans le tronçon *BC*. Le tronçon *CD* ne subit pas la torsion, les moments de torsion dans ce tronçon étant nuls ; toutes les sections tournent donc de même angle que la section *C*. Le secteur *MN* du diagramme de ϑ est ici horizontal. On propose au lecteur d'établir que si la section supposée fixe est *B*, le diagramme des angles de torsion est de la forme représentée sur la figure V.12, *d*.

Exemple V.1. Calculer le diamètre de l'arbre en acier qui tourne à la vitesse angulaire $\omega =$ $= 100$ rd/s et qui transmet une puissance $P = 100$ kW. La contrainte admissible $\tau_{adm} =$ $= 40$ MPa ; l'angle de torsion admissible $\gamma_{adm} = 0{,}5$ degré/m; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.

Solution. Le moment transmis par l'arbre se calcule d'après la formule

$$T_e = P/\omega = 100\,000/100 = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Le moment de torsion dans toutes les sections droites de l'arbre est le même :

$$T = T_e = 1000 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ MN} \cdot \text{m}.$$

Le diamètre de l'arbre se calcule à la résistance d'après (V.15) :

$$d = 1{,}72\sqrt[3]{10^{-3}/40} = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm} = 50 \text{ mm}.$$

La formule (V.24) permet de vérifier le diamètre de l'arbre par la condition de rigidité

$$d = \sqrt[4]{180 \cdot 10^{-3}/(3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5)} = 0{,}052 \text{ m} = 5{,}2 \text{ cm} = 52 \text{ mm}.$$

Dans le cas considéré le diamètre de l'arbre se détermine d'après la condition de rigidité et il faut retenir $d = 52$ mm.

Exemple V.2. Choisir les dimensions de la section d'un arbre tubulaire qui transmet le moment $T_e = 6$ kN · m, le rapport des diamètres étant $c = d/D = 0{,}8$, et la contrainte admissible $\tau_{adm} = 60$ MPa. Comparer le poids de cet arbre avec celui de l'arbre d'égale résistance mais à section pleine.

Réponse. Dimensions de l'arbre tubulaire: $D = 9{,}52$ cm ; $d = 7{,}62$ cm. L'aire de la section $A_1 = 25{,}9$ cm^2. Le diamètre de l'arbre à section pleine : $d_1 = 8$ cm ; l'aire de la section $A_2 =$ $= 50{,}2$ cm^2. La masse de l'arbre tubulaire vaut 51 % de la masse de l'arbre plein.

§ 39. Energie potentielle en torsion

En torsion les moments extérieurs effectuent un travail par suite de la rotation des sections auxquelles sont appliqués les moments. Ce travail est absorbé par la production d'une réserve d'énergie potentielle de déformation, égale numériquement au travail des forces intérieures.

D'une façon analogue à la traction, on peut montrer que le *travail de l'application statique du moment de torsion extérieur est égal à la moitié du produit de la valeur terminale du moment par l'angle de torsion définitif* :

$$W = T_e\vartheta/2. \qquad \text{(V.25)}$$

Le travail des forces intérieures de signe négatif et l'énergie potentielle qui lui est égale numériquement se calculent à la torsion de la même façon que le travail des forces intérieures dans le cas de la traction (compression).

Le travail élémentaire des forces intérieures

$$dW_i = -T\,d\vartheta/2, \qquad \text{(V.26)}$$

où T est le moment de torsion ; $d\vartheta$ l'angle de torsion d'un élément de longueur dz.

Mais, d'après la formule (V.7),

$$d\vartheta = T\,dz/(GI_p).$$

Donc,

$$dW_i = -T^2\,dz/(2GI_p). \qquad \text{(V.27)}$$

Le travail total des forces intérieures s'obtient en intégrant l'expression du travail élémentaire suivant toute la longueur l de la barre :

$$W_i = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2dz}{GI_p}. \qquad \text{(V.28)}$$

Pour calculer l'énergie potentielle égale en valeur au travail des forces intérieures et de signe opposé, on a

$$U = -W_i = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2dz}{GI_p}. \qquad \text{(V.29)}$$

Si le moment de torsion et la rigidité de la barre ne changent pas suivant la longueur, il vient

$$U = T^2l/(2GI_p). \qquad \textbf{[V.30]}$$

§ 40. Principes théoriques de la torsion des barres de section non circulaire

Dans les barres de section non circulaire sollicitées à la torsion, les sections ne restent pas planes et sont *gauchies* (fig. V.13, *a*). Si ce gauchissement ne rencontre pas d'obstacles, les sections droites ne subissent pas de

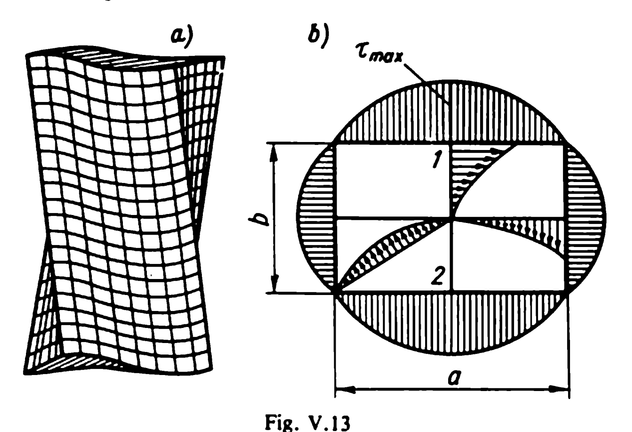


Fig. V.13

contraintes normales. La torsion est dite alors *pure* ou *libre*. La torsion libre n'est possible que si la section de la barre et le moment de torsion sont constants et les extrémités de la barre ne sont pas encastrées.

Pour des barres de section non circulaire la détermination des contraintes tangentielles est un problème assez compliqué, résolu par les méthodes

de la théorie de l'élasticité. Voici les résultats principaux pour les barres de section rectangulaire avec $a > b$ (fig. V.13, *b*).

Les contraintes tangentielles maximales apparaissent aux points *1* et *2*, c'est-à-dire au milieu des côtés longs :

$$\tau_{max} = T/(\alpha ab^2) = T/W_t; \tag{V.31}$$

l'angle de torsion

$$\vartheta = Tl/(G\beta ab^3) = Tl/(GI_t). \tag{V.32}$$

Ici α et β sont des coefficients qui dépendent des rapports entre les côtés. Leurs valeurs sont consignées sur le tableau V.1.

Tableau V.1

a/b	1	2	3	4	5	10	20	∞
α	0,21	0,25	0,27	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33
β	0,14	0,23	0,26	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33

Les quantités $W_t = \alpha ab^2$ et $I_t = \beta ab^3$ sont respectivement les caractéristiques géométriques de la résistance et de la rigidité à la torsion de la barre de section rectangulaire.

D'après le tableau V.1 pour les sections rectangulaires étroites à quotient $a/b \geqslant 10$ on peut adopter $\alpha = \beta \approx 1/3$.

La distribution des contraintes tangentielles suivant le périmètre de la section de la barre le long de ses axes et diagonales est visualisée par la figure V.13, *b*. Aux points des angles $\tau = 0$.

Pour les autres profils (elliptique, circulaire, à rainure de clavette, etc.) les formules de calcul sont données par les ouvrages de référence.

Pour des profils non fermés constitués de rectangles étroits et longs ($a/b \geqslant 10$), la caractéristique géométrique I_t peut se calculer d'après l'expression

$$I_t = \frac{1}{3} \sum ab^3, \tag{V.33}$$

où a est la longueur du plus grand côté du rectangle ; b, la longueur du plus petit côté.

La contrainte tangentielle maximale est engendrée dans le rectangle à largeur maximale :

$$\tau_{max} = Tb_{max}/I_t, \tag{V.34}$$

où b_{max} est la valeur maximale du côté court du rectangle.

L'angle de torsion est déterminé par la formule

$$\vartheta = Tl/(GI_t). \tag{V.35}$$

Pour les profils laminés la valeur de I_t est donnée par des tableaux spéciaux. Il convient de noter que pour de tels profils (à parois minces de profil ouvert) I_t est très petit par rapport aux barres de section circulaire pleine de même aire, sans parler de la section annulaire. Il convient donc d'éviter de faire travailler à la torsion les barres de profil ouvert.

Dans le cas de la torsion *entravée*, lorsque le gauchissement des sections est rendu difficile, les formules mentionnées sont inapplicables. La théorie générale de la torsion entravée des barres à parois minces de profil ouvert est établie par V. Vlassov. Il a montré qu'en torsion entravée, en plus des contraintes tangentielles de la torsion pure calculées d'après les formules ci-dessus, la section droite subit des contraintes tangentielles et normales supplémentaires importantes. La théorie de la torsion entravée dépasse le cadre du cours de résistance des matériaux.

§ 41. Torsion des barres à parois minces de profil fermé

Dans le cas de la sollicitation à la torsion les barres à parois minces de profil fermé sont sensiblement plus rigides, et par suite, plus avantageuses.

Considérons la barre cylindrique de section droite représentée sur la figure V.14. Admettons que l'épaisseur de la paroi t change progressivement

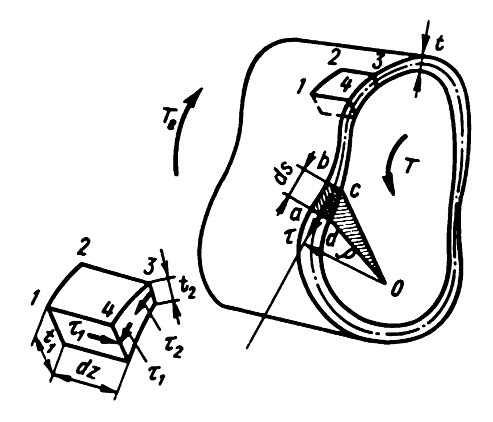


Fig. V.14

le long du contour de façon que la concentration des contraintes peut être négligée.

Le lieu géométrique des points équidistants des contours extérieur et intérieur s'appelle *ligne moyenne*.

L'épaisseur de la paroi étant négligeable, on peut admettre que dans cette épaisseur les contraintes tangentielles produites par la torsion sont réparties uniformément et dirigées suivant la tangente à la ligne moyenne de la section. On peut montrer également que le produit de la contrainte tan-

gentielle en un point quelconque de la paroi par l'épaisseur de celle-ci est une constante pour tous les points de la ligne axiale de la section, c'est-à-dire τt = const.

A cet effet, il suffit d'examiner la condition d'équilibre d'un élément quelconque de la barre, par exemple *1 2 3 4* (fig. V.14). La section longitudinale *1—4* subit la contrainte tangentielle paire τ_1 ; la section *2—3*, la contrainte tangentielle paire τ_2.

En projetant les forces supportées par l'élément sur la direction de l'axe de la barre, on obtient $\tau_1 t_1\, dz = \tau_2 t_2\, dz$. Les points *3* et *4* étant pris arbitrairement, on a τt = const.

Maintenant on peut associer la contrainte tangentielle au moment de torsion subi par la section. La force appliquée à l'aire élémentaire $t ds$ (fig. V.14) est égale, évidemment, à $\tau\, t ds$, alors que le moment de torsion produit par cette force élémentaire par rapport au point arbitraire O qui repose dans le plan de la section, est égal à $\tau\, t ds \rho$, où ρ est le bras de l'action de la force par rapport au point O.

La somme des moments par rapport à l'axe parallèle à la génératrice de la barre et passant par le point O est égale au moment de torsion

$$T = \int_s \tau t \rho \, ds,$$

où l'intégration porte sur toute la longueur du contour s ; mais le produit ρds est égal à la double aire du triangle Oab. Par conséquent, $T = \int_A \tau t 2 dA$. Le produit $2\tau t$ étant constant, il peut être sorti du signe d'intégration. Sous le signe d'intégration reste alors l'expression $\int_A dA$ qui est la surface de la section pleine délimitée par la ligne moyenne de la section. Il vient

$$T = \tau t 2A, \tag{V.36}$$

d'où

$$\tau = T/(t2A). \tag{V.37}$$

La contrainte maximale sera au droit où l'épaisseur de la paroi est minimale

$$\tau_{max} = T/(2At_{min}). \tag{V.38}$$

Pour une barre de longueur l l'angle de torsion ϑ se calcule sous la condition que le travail du moment de torsion extérieur est égal au travail des forces intérieures. Le travail statique du moment extérieur le long du déplacement angulaire ϑ est

$$W = T_e \vartheta/2.$$

Calculons maintenant l'énergie potentielle de déformation égale numériquement au travail des forces intérieures.

Lors de l'action des contraintes tangentielles l'énergie potentielle spécifique se calcule d'après la formule [III.2].

L'énergie potentielle de l'élément de volume tl ds est

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} tl ds,$$

où l est la longueur de la barre.

L'énergie potentielle totale de toute la barre

$$U = \frac{l}{2G}\int_0^s \tau^2 t\, ds.$$

L'intégration porte sur la longueur s du contour de la section.

En remplacant τ par sa valeur tirée de [V.37], on trouve

$$U = \frac{l}{2G}\int_0^s \frac{T^2}{\beta^2 4A^2} t\, ds.$$

Sortons du signe d'intégration les grandeurs constantes

$$U = \frac{T^2 l}{8GA^2}\int_0^s \frac{ds}{t}.$$

En retenant que l'énergie potentielle U est numériquement égale au travail W du moment extérieur, on obtient, avec $T = T_e$,

$$\vartheta = \frac{T_e l}{4GA^2}\int_0^s \frac{ds}{t}. \qquad [V.39]$$

Exemple V.3. Calculer la contrainte maximale et l'angle de torsion d'une barre tubulaire (fig. V.15) si $T = T_e = 1500$ N · m ; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa $= 8 \cdot 10^{10}$ Pa.

Solution. En vertu de la formule (V.38),

$$\tau_{max} = 1500/(2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 7 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}) =$$
$$= 612 \cdot 10^5 \text{N/m}^2 = 61{,}2 \text{ MPa}.$$

D'après [V.39] l'angle de torsion sur 1 m

$$\vartheta = \frac{1500}{4 \cdot 3{,}5^2 \cdot 7^2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{10}}\left(\frac{2 \cdot 3{,}5}{1} + \frac{2 \cdot 7}{0{,}5}\right) = 0{,}037 \text{ rd}.$$

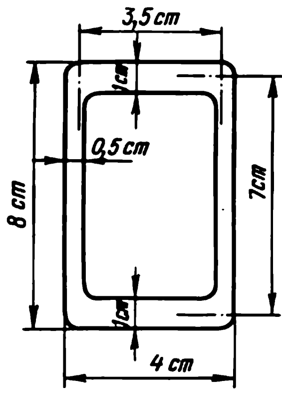


Fig. V.15

Exemple V.4. Calculer la contrainte maximale et l'angle de torsion de cette même barre si son profil est ouvert, c'est-à-dire si en un point son contour est coupé.

Solution. La contrainte est déterminée par la formule (V.34) :

$$\tau_{max} = \frac{Tb_{max}}{1/3\sum ab^3} = \frac{1500 \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{1/3(2 \cdot 3{,}5 \cdot 1^3 + 2 \cdot 7 \cdot 0{,}5^3) \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \frac{15 \cdot 10^8}{2{,}93} = 5{,}12 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 512 \text{ MPa} > 61{,}2 \text{ MPa}.$$

Notons que ce résultat a un sens seulement pour une barre en acier allié dont la limite de proportionnalité au cisaillement pur τ_{pr} n'est pas inférieure à τ_{max}, du fait que toutes les formules du présent chapitre ne sont vraies que dans les limites de la validité de la loi de Hooke.

L'angle de torsion se calcule d'après la formule (V.35) :

$$\vartheta = 1500 \cdot 1/(8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 2{,}93 \cdot 10^{-8}) = 0{,}64 \text{ rd} > 0{,}037 \text{ rd}.$$

La comparaison des résultats de ces deux exemples confirme l'avantage que présentent pour le travail à la torsion les profils fermés.

§ 42. Problèmes hyperstatiques

La torsion tout comme la traction pose parmi d'autres, les problèmes qui ne se résolvent pas si on applique seulement les équations d'équilibre. Le nombre d'inconnues dans ces problèmes dépasse celui d'équations. L'ordre de leur résolution est le même que dans le cas des problèmes hyperstatiques de la traction (compression).

Examinons à titre d'exemple une barre dont les deux extrémités sont encastrées (fig. V.16, *a*). Cette barre est hyperstatique du fait que pour déterminer deux couples de réaction supportés par les encastrements, la statique ne fournit qu'une équation d'équilibre.

Rejetons un encastrement en remplaçant son action par le moment X inconnu (fig. V.16, *b*). L'équation supplémentaire (appelée, comme on le sait, équation de déformation ou des déplacements) s'obtient en convenant

qu'au droit de l'encastrement rejeté l'angle de rotation de la section, égal à l'angle de torsion de la barre sous l'action des moments T_c et X, est nul ($\vartheta_B = 0$).

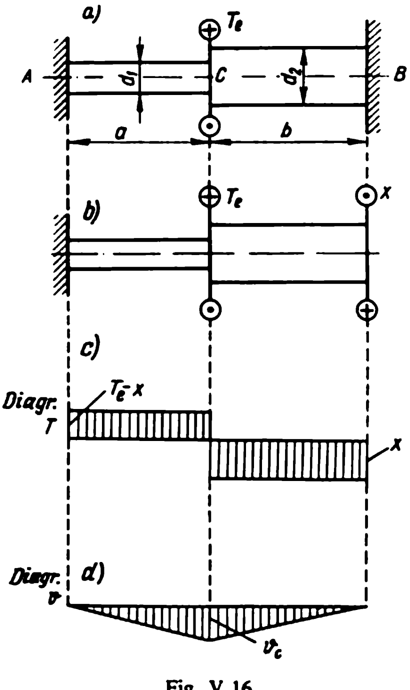


Fig. V.16

Dans le système isostatique obtenu, dit principal, la section B tourne sous l'action du moment extérieur et du moment X. L'angle de rotation de la section B sous l'action du moment X

$$\vartheta_B' = \frac{Xa}{GI_p'} + \frac{Xb}{GI_p''},$$

où

$$I_p' \approx 0{,}1\, d_1^4 \,;\, I_p'' \approx 0{,}1\, d_2^4.$$

L'angle de rotation de la section B sous l'action du moment T_c

$$\vartheta_B'' = -T_c a/(GI_p).$$

En portant ces valeurs dans l'équation des déplacements, on obtient

$$\vartheta_B = 0\,;\, \frac{Xa}{GI_p'} + \frac{Xb}{GI_p''} - \frac{T_c a}{GI_p'} = 0.$$

Ceci permet de calculer X.

Ensuite, on peut déterminer le moment de torsion en une section quelconque et construire le diagramme de T et des angles de torsion. Pour construire le diagramme de ϑ, il suffit de calculer l'angle de rotation de la section C

$$\vartheta_C = -Xb/(GI_p'') = -(T_e - X)a/(GI_p'').$$

Les angles de rotation des sections A et B sont nuls et puisque l'angle de rotation de la section est fonction de la distance [cf. formule (V.19)], les points du diagramme obtenus doivent être reliés par des droites. Les diagrammes de T et de ϑ sont représentés sur les figures V.16, *c*, *d*.

Exemple V.5. Un tube à parois minces de matériau à module G_1 est placé dans un autre tube à matériau de module G_2. Une extrémité de la construction ainsi obtenue est encastrée, alors qu'à l'autre est appliqué le moment extérieur T_e qui agit sur les deux tubes (fig. V.17). Calculer les moments de torsion dans les sections droites des tubes.

Solution. Il y a deux moments de torsion inconnus : celui du tube intérieur T_1 et du tube extérieur T_2, alors que l'équation d'équilibre est une seule :

$$T_1 + T_2 = T_e. \qquad \text{(I)}$$

Le problème est hyperstatique du premier degré. Composons l'équation des déformations en égalant entre eux les angles de rotation des sections à l'extrémité droite des tubes (égaux aux angles de torsion totaux des tubes)

$$\vartheta_1 = \vartheta_2$$

ou

$$T_1l/(G_1I_{p1}) = T_2l/(G_2I_{p2}). \qquad \text{(II)}$$

Le moment d'inertie polaire de la section du tube intérieur I_{p1} ; du tube extérieur I_{p2}. Les sections étant annulaires, ces moments sont déterminés d'après les formules du § 30. Lorsque

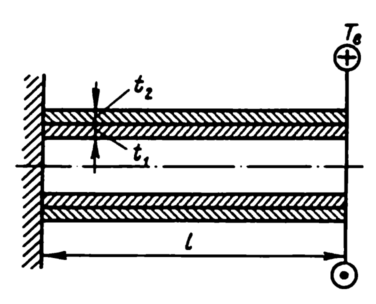


Fig. V.17

l'épaisseur des parois n'est pas grande, les angles de torsion peuvent se calculer d'après la formule [V.39] qui, pour une épaisseur constante t, est de la forme

$$\vartheta = Tls/(4GA^2t) = 4Tl/(G\pi d^3t),$$

où $d_m = (d_2 + d_1)/2$ est le diamètre moyen du tube ; $s = \pi d_m$, la longueur de la circonférence moyenne de la section du tube.

Déterminons à partir des deux équations (I) et (II) les moments de torsion dans les sections droites, puis d'après la formule [V.37], les contraintes. Dans le cas d'une épaisseur des parois importante il faut appliquer les formules du § 36.

§ 43. Concentration des contraintes

Lorsque le contour de la section transversale ou longitudinale change brusquement, on observe la *concentration des contraintes*. Son influence est prise en compte par le coefficient déterminé soit théoriquement par les méthodes de la théorie de l'élasticité, soit empiriquement.

La figure V.18 donne le graphique pour la détermination du coefficient de concentration des contraintes théorique α_τ en torsion d'un arbre, ses

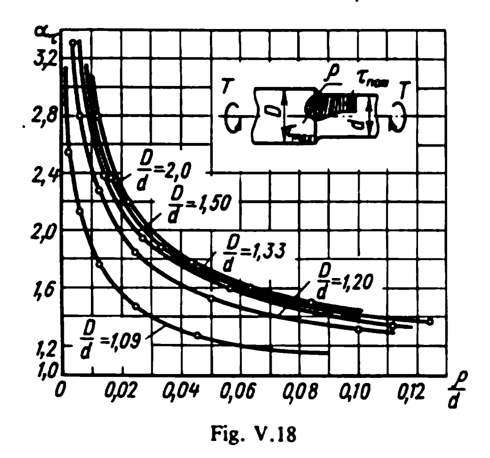


Fig. V.18

parties étant conjuguées par un congé circulaire de rayon *r*. On voit qu'avec les raccords brusques, c'est-à-dire pour de faibles valeurs de r/d, α_τ croît fortement.

Si le coefficient de concentration des contraintes est connu, pour une tige de section droite circulaire la contrainte tangentielle maximale est déterminée par la formule

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \tau_{nom} = \alpha_\tau T/W_p,$$

où $\tau_{nom} = T/W_p$ est la contrainte nominale calculée pour la section minimale.

L'influence de la concentration des contraintes est prise en compte: a) lors de l'action des charges statiques sur des matériaux peu plastiques et susceptibles de rupture fragile ; b) lors de l'action des charges variables (calcul à l'endurance) pour tous les matériaux.

Pour diminuer la concentration des contraintes, il faut éviter les changements brusques du contour de la section en conjuguant les diamètres fortement différents de la barre par des raccords de rayon le plus grand possible.

§ 44. Formes rationnelles de la section soumise à la torsion

Des deux sections de même couple de réaction polaire (ou, dans le cas d'une section non circulaire, de même W_t) et donc, de même moment de torsion admissible, la section rationnelle est celle dont l'aire est minimale, c'est-à-dire assurant le débit minimal du matériau. Le quotient W_p/A ou W_t/A étant une quantité dimensionnelle, pour comparer les différentes sections il est commode d'employer une quantité sans dimension

$$w_p = W_p/\sqrt{A^3}$$

(pour une section non circulaire, $w_t = W_t/\sqrt{A^3}$) qu'on nomme *couple de réaction spécifique en torsion*. Plus w_t est grand, plus la section est avantageuse.

Le tableau V.2 donne les valeurs de w_t pour certaines sections.

Tableau V.2

Type de la section	w_t
Poutre en U	0,04 à 0,05
Poutre en H	0,05 à 0,07
Section rectangulaire avec $a/b = 10$	0,1
Ibidem, $a/b = 2$	0,18
Carré	0,21
Section circulaire pleine	0,28
Anneau circulaire avec $c = d/D = 0,5$	0,37
Anneau circulaire avec $c = 0,9$	1,16

On voit qu'en torsion les moins convenables sont les poutres en U, en H, les sections rectangulaires étroites, et les plus convenables, les sections circulaires annulaires, surtout dans le cas des parois à petite épaisseur.

Comparons l'aire de la section A_2 des tubes avec celle de la section A_1 des barres pleines pour de différentes valeurs de $c = d/D$ et sous la condition d'égale résistance. L'égalité des couples de réaction polaires des sections pleine et annulaire entraîne

$$\pi d_1^3/16 = \pi D^3(1 - c^4)/16.$$

Pour assurer une résistance égale il faut observer la condition

$$D = d_1/\sqrt[3]{1 - c^4}.$$

Le rapport des aires des sections

$$A_2/A_1 = \pi/4(D^2 - d^2) : \pi d_1^2/4 = D^2(1 - c^2)/d_1^2.$$

En y portant la valeur de D obtenue à partir de la condition d'égale résistance, on obtient

$$A_2/A_1 = (1 - c^2)/\sqrt[3]{(1 - c^4)^2}.$$

Le tableau V.3 donne les valeurs du rapport A_2/A_1 calculées d'après cette formule pour de différentes valeurs de $c = d/D$.

Tableau V.3

c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
A_2/A_1	1	0,99	0,96	0,92	0,85	0,79	0,70	0,61	0,51	0,39

Ce tableau montre que l'utilisation des tubes à parois minces assure une plus grande économie de métal.

Pour choisir la section d'après la rigidité le critère de profil économique peut être donné par la grandeur sans dimension

$$j_p = I_p/A^2$$

ou $j_t = I_t/A^2$ pour des sections non circulaires ; on l'appelle *moment d'inertie polaire spécifique* ou caractéristique géométrique spécifique de la rigidité en torsion.

Le tableau V.4 consigne les valeurs de j_t pour certaines sections les plus usitées.

Tableau V.4

Type de la section	j_t
Poutre en U	0,010 à 0,011
Poutre en H	0,009 à 0,015
Section rectangulaire avec $a/b = 10$	0,031
Section rectangulaire avec $a/b = 2$	0,115
Carré	0,14
Section circulaire pleine	0,16
Section annulaire avec $c = d/D = 0,5$	0,264
Section annulaire avec $c = 0,9$	1,52

On voit que le calcul à la rigidité rend encore plus évidents les avantages des sections annulaires à parois minces par rapport aux autres types des sections. La comparaison des aires des barres à section annulaire et pleine pour la même rigidité est donnée par le tableau V.5. Dans ce tableau A_2 est l'aire de la section de la barre annulaire (tube) ; A_1, l'aire de la section circulaire pleine.

Tableau V.5

c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
A_2/A_1	1	0,99	0,96	0,92	0,85	0,78	0,69	0,58	0,46	0,32

En comparant ce tableau avec le tableau V.3, on voit que dans le calcul à la rigidité l'utilisation des barres à parois minces permet d'enregistrer une économie encore plus grande de métal.

CHAPITRE VI

FLEXION. DÉTERMINATION DES CONTRAINTES

§ 45. Généralités

Il est fréquent que les barres subissent l'action d'une charge transversale ou des couples extérieurs (fig. VI.1). Dans ces conditions, les sections droites de la barre sont sollicitées par des moments fléchissants, c'est-à-dire des moments intérieurs dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section droite. L'action d'une telle charge provoque l'incurvation de l'axe de la barre.

Cette forme de sollicitation s'appelle *flexion*, et les barres qui travaillent surtout à la flexion s'appellent *poutres*. La flexion est dite *pure* si le

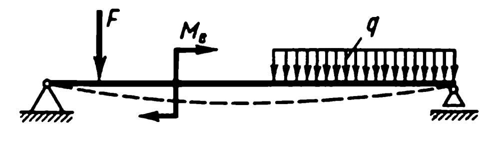


Fig. VI.1

moment fléchissant est l'unique effort intérieur que supporte la section droite.

Il est plus fréquent, pourtant, que les sections droites des barres sont soumises en plus à des efforts tranchants. Une telle flexion est dite *simple*.

Si le plan du moment fléchissant (plan de force) passe par l'un des axes centraux principaux de la section droite de la barre, la flexion est dite *plane* ou *droite*. Si le plan du moment fléchissant ne coïncide pas dans la section avec l'un de ses axes principaux, on dit que la flexion est *déviée*. Nous montrerons dans ce qui suit que dans le cas de la flexion plane l'axe de la poutre après la déformation reste aussi dans le plan des forces extérieures. Lorsque la flexion est déviée, le plan de la déformation ne coïncide pas avec le plan de forces.

L'étude de la flexion débute par la flexion pure, ensuite on envisage le cas plus général de la flexion simple. La flexion déviée se rapporte à la résistance composée des barres et sera examinée au chapitre IX.

§ 46. Types des appuis des poutres

Les appuis des poutres envisagés comme des systèmes plans peuvent être de trois types.

1. *Appui simple ou glissant* (fig. VI.2, *a*). Un tel appui n'interdit pas la rotation de l'extrémité de la poutre et son déplacement le long du plan de roulement. Il peut être le siège d'une seule réaction perpendiculaire au plan

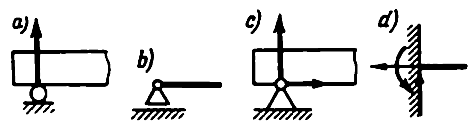


Fig. VI.2

de roulement et passant par le centre du rouleau. Un tel appui est schématisé sur la figure VI.2, *b*.

Les appuis simples ou glissants rendent possible le changement sans aléas de la longueur de la poutre lors de la variation de la température et éliminent par là les contraintes thermiques éventuelles.

2. *Appui à rotule ou articulation* (fig. VI.2, *c*). Cet appui admet la rotation de l'extrémité de la poutre, mais interdit la translation quelle que soit sa direction. La réaction dont il est le siège peut être décomposée en deux composantes : horizontale et verticale.

3. *Appui à encastrement* (fig. VI.2, *d*). Cette fixation interdit le déplacement de la section d'appui aussi bien linéaire qu'angulaire. Dans un cas général, un tel appui peut être soumis à une réaction décomposée ordinairement en deux composantes (verticale et horizontale) et un couple de réaction.

Une poutre à une seule extrémité encastrée s'appelle *console*.

Si pour le calcul des réactions d'appui les équations de la statique suffisent, on dit que les poutres sont *isostatiques*. Mais si le nombre de réactions d'appui est plus grand que le nombre d'équations de la statique possibles pour le problème considéré, les poutres sont dites *hyperstatiques*. Pour de telles poutres le calcul des réactions se fait en composant des équations complémentaires que sont les équations des déplacements.

§ 47. Détermination des réactions d'appui

Considérons quelques exemples.

Exemple VI.1. Déterminer les réactions d'appui de la console de la figure VI.3.

Solution. Présentons la réaction de l'encastrement sous la forme de deux forces A_z et A_y orientées suivant le dessin, et un couple de réaction M_A.

Composons l'équation d'équilibre de la poutre.

1. Annulons la somme des projections sur l'axe z de toutes les forces appliquées à la poutre : $\sum Z = 0$. On obtient $A_z = 0$. En l'absence de charge horizontale la composante horizontale est nulle.

2. Procédons de même avec les projections sur l'axe y : $\sum Y = 0$. Remplaçons la charge q répartie uniformément par la résultante qa_3 appliquée au milieu du tronçon a_3:

$$A_y - F_1 - qa_3 = 0, \text{ d'où } A_y = F_1 + qa_3.$$

La composante verticale de la réaction d'une console est égale à la somme des forces appliquées.

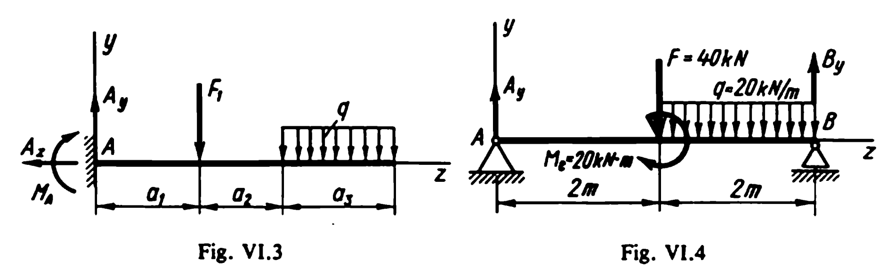


Fig. VI.3 Fig. VI.4

3. Composons la troisième équation d'équilibre. Annulons la somme des moments de toutes les forces par rapport à un point, par exemple, par rapport à A:

$$\sum M_A = 0\,; \quad -M_A - F_1a_1 - qa_3(a_1 + a_2 + a_3/2) = 0,$$

d'où

$$M_A = -F_1a_1 - qa_3(a + a_2 + a_3/2).$$

Le signe moins montre que la direction du couple de réaction retenue au début doit être inversée. Ainsi, dans un encastrement, le couple de réaction est égal à la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'encastrement.

Exemple VI.2. Déterminer les réactions d'appui d'une poutre en U à deux appuis (fig. VI.4). Il est d'usage de dire que ce sont des poutres simples.

Solution. La charge horizontale étant absente, $A_z = 0$.

$$1.\ \sum M_B = 0\,;\ -A_y \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 1 - 20 = 0,$$
$$A_y = 25 \text{ kN}, 2 \sum M_A = 0\,;$$
$$B_y \cdot 4 - 40 \cdot 3 - 40 \cdot 2 - 20 = 0,\ B_y = 55 \text{ kN}.$$

Au lieu de la deuxième condition on peut utiliser la condition $\sum Y = 0$ qui dans notre cas doit être appliquée pour vérifier la solution : $\sum Y = 0\,;\ -40 + 25 - 40 + 55 = 0$; ainsi, on obtient une identité.

Exemple VI.3. Déterminer les réactions d'appui d'une poutre de configuration brisée (fig. VI.5).

Solution.
$$1.\ \sum M_A = 0,\ -Fa + B_ya = 0,\quad B_y = F.$$
$$2.\ \sum Z = 0,\ -A_z + F = 0,\quad A_z = F.$$
$$3.\ \sum Y = 0,\ A_y + B_y = 0,\quad A_y = -B_y = -F,$$

c'est-à-dire que la réaction A_y est dirigée non pas en haut, mais en bas. Pour vérifier si la solution est correcte, on peut utiliser, par exemple, l'équation $\sum M_B = 0$.

§ 48. Détermination des efforts intérieurs en flexion

Comme nous l'avons déjà dit, la flexion simple plane engendre dans les sections droites d'une poutre deux efforts intérieurs (deux facteurs de force intérieurs), le moment fléchissant M et l'effort tranchant Q. Pour les déter-

miner, appliquons la méthode des sections. A l'endroit qui nous intéresse, pratiquons en pensée la coupe à la distance z de l'appui gauche (fig. VI.6, *a*). Rejetons une partie de la poutre, par exemple celle de droite, et considérons l'équilibre de la partie gauche.

Remplaçons l'interaction des parties de la poutre par les efforts intérieurs : le moment fléchissant M et l'effort tranchant Q (fig. VI.6, *b*).

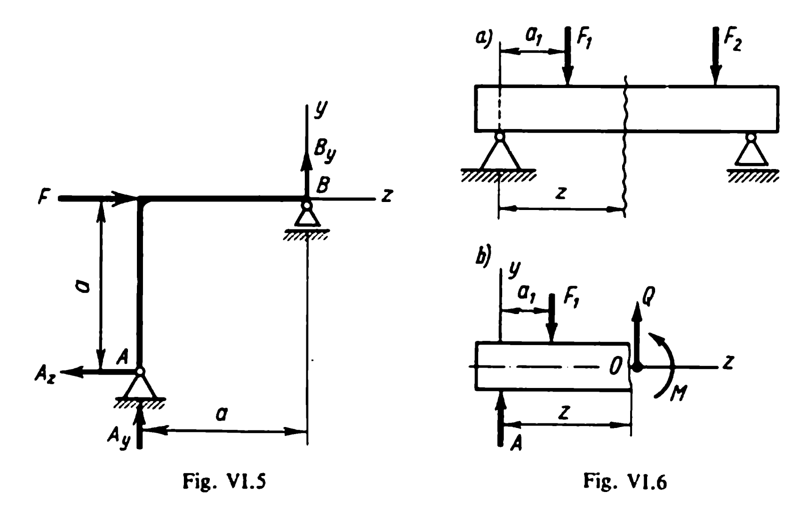


Fig. VI.5

Fig. VI.6

Pour calculer M et Q, utilisons deux équations d'équilibre :

1. $\sum Y = 0 ; A - F_1 + Q = 0; Q = F_1 - A, Q = \sum(F_i)_y$.
2. $\sum M_0 = 0 ; Az - F_1(z - a_1) - M = 0 ; M = Az - F_1(z - a_1)$; $M = \sum m_0(F_i)$.

Ainsi, *dans la section droite d'une poutre*

1) *l'effort tranchant Q est numériquement égal à la somme algébrique des projections sur le plan de la section de toutes les forces extérieures appliquées d'un côté de la section* ;

2) *le moment fléchissant est numériquement égal à la somme algébrique des moments (calculés par rapport au centre de gravité de la section) des forces extérieures appliquées d'un côté de la section considérée.*

§ 49. Règle des signes des moments fléchissants et des efforts tranchants

L'effort tranchant dans la section *m—n* d'une poutre (fig. VI.7, *a*) est considéré comme *positif*, si la résultante des forces extérieures à gauche de la section est dirigée de bas en haut, et à droite de la section, de haut en bas, et *négative* dans le cas contraire (fig. VI.7, *b*). On admet que dans la section d'une poutre, par exemple dans *m—n* (fig. VI.8,*a*), le moment fléchissant est *positif* si la résultante de tous les moments des forces extérieures à gau-

che de la section est dirigée dans le sens horaire, et *négative* si elle est dirigée dans le sens antihoraire (fig. VI.8, *b*). Les moments de la figure VI.8, *a* fléchissent la poutre par la convexité en bas, alors que ceux de la figure VI.8, *b*, par la convexité en haut. On le vérifie sans peine en faisant fléchir une règle élancée.

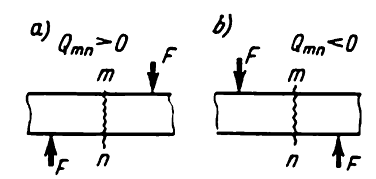


Fig. VI.7

On en tire une autre règle des signes du moment fléchissant, plus commode à retenir. *Le moment fléchissant est considéré comme positif si dans la section envisagée la courbure de la poutre est orientée en bas.* Dans ce qui suit, on démontre que les fibres de la partie concave de la poutre subissent la compression, et celles de la partie convexe, la traction. De la sorte, en portant par convention les ordonnées positives du diagramme de M en haut à partir de l'axe, on obtient que le diagramme est dressé *du côté des fibres comprimées de la poutre.*

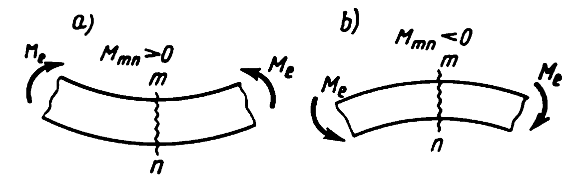


Fig. VI.8

§ 50. Relation entre le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'intensité de la charge répartie

On établit sans peine la relation définie entre le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'intensité de la charge répartie.

Considérons une poutre soumise à une charge arbitraire (fig. VI.9). Déterminons l'effort tranchant dans la section à la distance z de l'appui gauche. En projetant sur la verticale les forces à gauche de la section, on obtient

$$Q = A - F_1 + qz. \tag{a}$$

D'une façon analogue, on calcule l'effort tranchant dans la section connexe se trouvant à la distance $z + \mathrm{d}z$ de l'appui gauche :

$$Q + \mathrm{d}Q = A - F_1 + q(z + \mathrm{d}z). \tag{b}$$

En retranchant (a) de (b), on trouve $\mathrm{d}Q = q\mathrm{d}z$, d'où

$$q = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}z, \qquad \textbf{[VI.1]}$$

c'est-à-dire que *la dérivée de l'effort tranchant par rapport à l'abscisse de la section de la poutre est égale à l'intensité de la distribution de la charge.*

Calculons maintenant le moment fléchissant dans la section d'abscisse z, en prenant la somme des moments des forces appliquées à gauche de la

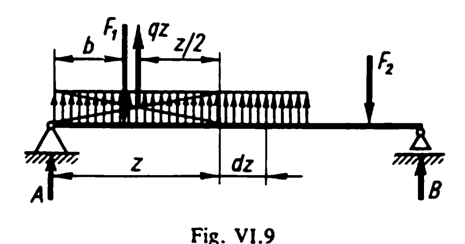


Fig. VI.9

section. A cet effet, la charge répartie sur le tronçon de longueur z est remplacée par sa résultante égale à qz et appliquée au milieu du tronçon à la distance $z/2$ de la section :

$$M = Az - F_1(z - b) + qz(z/2). \qquad \text{(c)}$$

D'une façon analogue, on calcule le moment fléchissant subi par la section connexe à la distance $z + \mathrm{d}z$ de l'appui gauche :

$$M + \mathrm{d}M = A(z + \mathrm{d}z) - F_1(z + \mathrm{d}z - b) + q(z + \mathrm{d}z)^2/2. \qquad \text{(d)}$$

En retranchant (c) de (d), on obtient l'accroissement du moment fléchissant

$$\mathrm{d}M = A\,\mathrm{d}z - F_1\mathrm{d}z + qz\mathrm{d}z = \mathrm{d}z(A - F_1 + qz).$$

L'expression entre parenthèses est l'effort tranchant Q. Donc,

$$\mathrm{d}M = Q\mathrm{d}z,$$

d'où

$$Q = \mathrm{d}M/\mathrm{d}z, \qquad \textbf{[VI.2]}$$

c'est-à-dire que *la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section est égale à l'effort tranchant* (*théorème de Jouravski*).

Après le calcul de la dérivée des deux membres de l'égalité [VI.2], il vient

$$\mathrm{d}Q/\mathrm{d}z = \mathrm{d}^2M/\mathrm{d}z^2 = q, \qquad \textbf{[VI.3]}$$

c'est-à-dire que *la dérivée seconde du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section de la poutre est égale à l'intensité de la charge répartie.*

§ 51. Construction des diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants

Pour donner une idée suggestive de l'allure de variation du moment fléchissant et de l'effort tranchant suivant la longueur de la poutre et calculer les sections dangereuses, on construit les diagrammes des M et des Q. La technique de cette construction est explicitée par les exemples qui suivent.

Exemple VI.4. Construire les diagrammes de M et de Q de la poutre représentée sur la figure VI.10, *a*.

Solution. Coupons la poutre à droite de la force à la distance z_1 de l'extrémité droite (section *I—I*) ; z_1 est une variable, l'indice 1 indiquant le numéro du tronçon où est pratiquée la coupe. Le plus simple est de déterminer le moment fléchissant dans la section *I—I* en calcu-

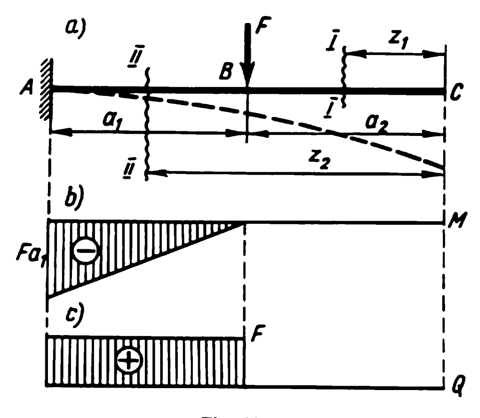


Fig. VI.10

lant la somme des moments des forces extérieures à droite de la section. On obtient $M = 0$. Ce résultat est vrai pour toutes les sections du tronçon BC.

Le moment fléchissant dans la section *II—II* du tronçon AB se calcule aussi comme la somme des moments de toutes les forces à droite de la section ; alors, on n'a pas à calculer les réactions d'appui sur l'encastrement; on obtient*

$$M_{z_2} = -F(z_2 - a_2) \quad (a_2 \leqslant z_2 \leqslant a_1 + a_2).$$

L'abscisse de la deuxième section pourrait se compter non pas à partir du point C, mais à partir d'un autre point, par exemple, du point B. Cependant, ceci ne présente aucun avantage.

Le signe moins est pris du fait que la flèche de la poutre est orientée en haut. Nous avons obtenu l'équation d'une ligne droite inclinée. Pour construire le diagramme calculons deux valeurs de M_z :

$$M_{z_2=a_2} = 0 \,; M_{z_2=a_1+a_2} = -Fa_1.$$

Portons à l'échelle retenue la quantité Fa_1 en bas suivant l'axe du diagramme. Le diagramme de M est représenté sur la figure VI.10, *b*. Le moment fléchissant maximal apparaît près de la section de l'encastrement : $M_{max} = -Fa_1$.

---

* Les notations Q_z et M_z employées ci-dessous insistent sur le fait que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont des fonctions de l'abscisse de la section droite de la poutre.

Calculons maintenant l'effort tranchant dans la section *I—I*. En projetant sur l'axe vertical les forces de droite, il vient $Q_{z_1} = 0$. Pour la section *II—II* on a de la même façon $Q_{z_2} = F$. On retient le signe plus parce que la force extérieure à droite de la section est dirigée de haut en bas. Le diagramme de Q est représenté sur la figure VI.10, *c*.

Pour déterminer le signe de l'effort tranchant on peut également proposer, en plus de la règle décrite, la règle qui suit : ***l'effort tranchant Q est positif pour les tronçons de la poutre où le diagramme de M est ascendant (lors du mouvement de gauche à droite) et négatif pour les tronçons où ce diagramme est descendant.***

Exemple VI.5. Construire le diagramme de M et de Q pour une console (fig. VI.11, *a*).

Solution. Il y a ici deux tronçons (*AB* et *BC*) pour lesquels l'allure de la sollicitation est différente et, par suite, les lois de variation de M et de Q sont différentes elles aussi.

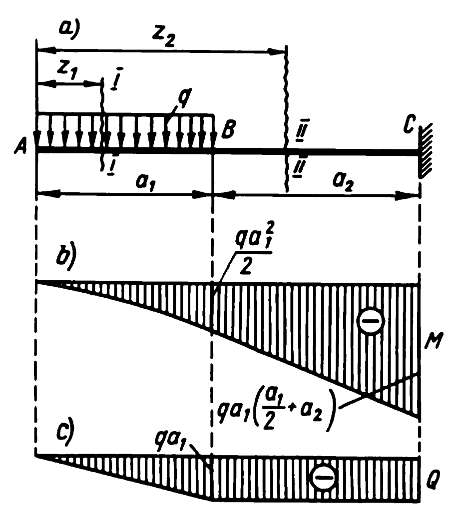


Fig. VI.11

Pour la section se trouvant à la distance z_1 du point A du tronçon AB, le moment fléchissant se calcule comme le moment des forces à gauche de la section; à cet effet, la charge répartie à gauche de la section est remplacée par la résultante qz_1 appliquée au milieu du tronçon de longueur z_1 ; on obtient

$$M_{z_1} = -qz_1(z_1/2) = -qz_1^2/2.$$

Le signe moins est pris du fait que la poutre est fléchie la courbure en haut. C'est l'équation d'une parabole construite approximativement d'après les trois points:

$$M_{z_1=0} = 0 \,;\, M_{z_1=a_1/2} = -qa_1^2/8;\, M_{z_2=a_1} = -qa_1^2/2.$$

Pratiquons une coupe dans le tronçon BC à la distance z_2 de l'extrémité libre de la poutre. Remplaçons la charge répartie sur la longueur a_1 par la résultante qa_1 appliquée au milieu du tronçon AB. Le moment dans la section *II—II*

$$M_{z_2} = -qa_1(z_2 - a_1/2).$$

C'est l'équation d'une droite. Calculons M_{z_2} pour deux valeurs de z_2 : $z_2 = a_1$ et $z_2 = a_1 + a_2$ pour obtenir :

$$M_B = -qa_1^2/2, \quad M_C = -qa_1(a_1/2 + a_2).$$

Le diagramme de M est représenté sur la figure VI.11, *b*.

En tant que somme des projections sur la verticale des forces à gauche de la section *I—I*, l'effort tranchant vaut

$$Q_{z_1} = -qz_1.$$

On peut également l'obtenir d'après la formule [VI.2] :

$$Q_{z_1} = dM_{z_1}/dz_1 = -qz_1.$$

L'effort tranchant dans la section *II—II* est $Q_{z_2} = -qa_1$. Le diagramme de Q est donné par la figure VI.11, *c*.

Dans les deux cas l'effort tranchant est pris avec le signe moins, parce que le diagramme de M est descendant (en se déplaçant de gauche à droite). Il convient également de porter l'attention sur la relation suivante impliquée par la formule [VI.2]. Dans les tronçons de la poutre où le moment fléchissant varie suivant une parabole (courbe du deuxième ordre), l'effort tranchant varie suivant une loi linéaire, c'est-à-dire que le diagramme est une droite inclinée (ligne du premier ordre). Mais là où M varie suivant une loi linéaire, c'est-à-dire où le diagramme de M est une droite inclinée, l'effort tranchant Q est constant et son diagramme est une droite horizontale (ligne d'ordre nul). En général, l'ordre de la fonction qui décrit la loi de variation de Q est d'une unité inférieur à l'ordre de la fonction exprimant la loi de variation de M. Ceci résulte directement de la formule [VI.2].

Exemple VI.6. Construire les diagrammes de M et de Q pour une poutre sur deux appuis sollicitée par une charge uniformément répartie (fig. VI.12, *a*, *b*, *c*).

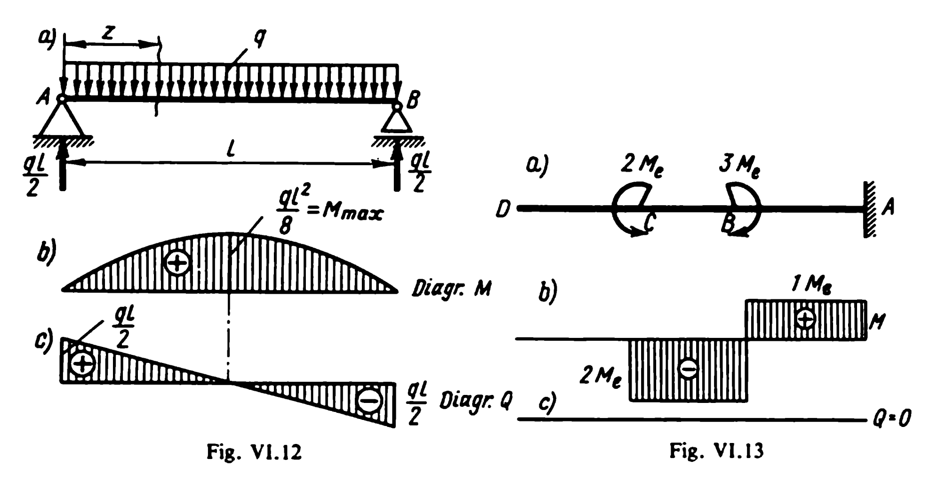


Fig. VI.12

Fig. VI.13

Solution. La symétrie de la sollicitation fait que les réactions sont égales entre elles :

$$A = B = ql/2.$$

Le moment fléchissant dans la section d'abscisse z est

$$M_z = qlz/2 - qz^2/2.$$

Le premier terme est le moment fléchissant dû à la réaction pris avec le signe plus, puisqu'en encastrant en pensée la poutre en cette section on peut voir que la réaction fléchit en bas la partie de la poutre à gauche de la section. Le deuxième terme est le moment fléchissant dû à la charge uniformément répartie à gauche de la coupe pratiquée. La résultante de cette charge est égale à qz, elle est appliquée au milieu du tronçon, c'est-à-dire à la distance $z/2$ de la section. Par conséquent, le moment produit par cette charge est égal à $qz^2/2$ avec le signe moins, puisqu'une telle charge fléchit la poutre (encastrée en pensée au droit de la coupe) en haut.

L'équation du moment fléchissant obtenue est celle d'une parabole. Calculons trois ordonnées du diagramme de M :

$$M_{z=0} = 0\,;\quad M_{z=l/2} = ql^2/8\,; M_{z=l} = 0.$$

D'après ces données construisons le diagramme de M. Le moment fléchissant maximal (au milieu de la poutre) $M_{max} = ql^2/8$.

Il est utile de retenir ce résultat auquel on recourt souvent dans les calculs. En dérivant l'expression de M_z et en annulant la dérivée première, on voit que le maximum de M est en effet appliqué au milieu de la travée.

L'effort tranchant dans la section (en tant que somme des forces appliquées à gauche)

$$Q_z = ql/2 - qz.$$

Le même résultat s'obtient d'après la formule [VI.2]. Calculons deux valeurs :

$$Q_{z=0} = ql/2\,;\quad Q_{z=l} = -ql/2.$$

Construisons le diagramme de Q. Portons l'attention sur le fait qu'au milieu de la travée $Q =$ $= 0$; or là, comme il s'ensuit de la relation [VI.2], le moment fléchissant est maximal.

Exemple VI.7. Construire les diagrammes de M et de Q de la console représentée sur la figure VI.13, *a*, *b*, *c*.

Solution. Dans le tronçon DC le moment fléchissant en tant que somme des moments appliqués à gauche, $M_z = 0$.

Dans le tronçon CB on a $M_z = -2M$. Pour le tronçon BA on a $M_z = -2M + 3M = M$.

Dans toutes les sections l'effort tranchant $Q = 0$.

Exemple VI.8. Construire les diagrammes de M et de Q de la poutre représentée sur la figure VI.14, *a*, *b*, *c*.

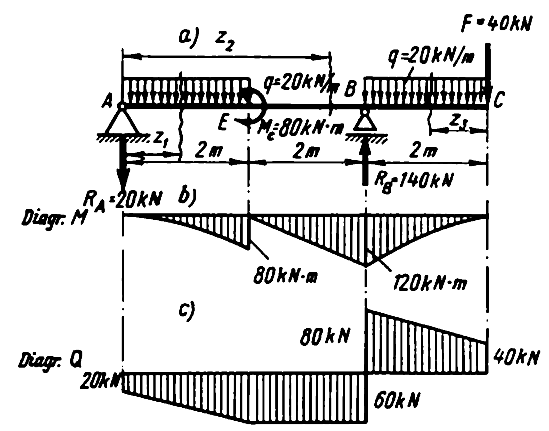


Fig. VI.14

Solution. En appliquant les équations d'équilibre, calculons les réactions : $R_A = 20$ kN (dirigée en bas) ; $R_B = 140$ kN (dirigée en haut).

Dans la section d'abscisse z_1 le moment fléchissant se détermine comme la somme des moments des forces appliquées à gauche :

$$M_{z_1} = -20z_1 - 20z_1^2/2.$$

Ceci est l'équation d'une parabole. Calculons trois valeurs de M_{z_1} :

$$M_{z_1=0} = 0\,; M_{z_1=1} = -30 \text{ kN}\cdot\text{m}\,; M_{z_1=2} = -80 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

D'après ces données, construisons le diagramme de M dans le tronçon AE. Calculons le moment fléchissant dans la section d'abscisse z_2:

$$M_{z_2} = -20z_2 - 40(z_2 - 1) + 80.$$

Le deuxième terme de cette expression est le moment fléchissant de la résultante de la charge répartie appliquée au tronçon AE. Cette résultante est égale à 40 kN et sa distance de la section envisagée est $-(z_2 - 1)$m.

Donnons à z deux valeurs : $z = 2$ m et $z = 4$ m. Après la substitution, on obtient

$$M_{z_2=2} = 0; \quad M_{z_2=4} = -120 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

D'après ces données on construit le diagramme de M pour le tronçon BE.

Déterminons le moment fléchissant dans la section à la distance z_3 de l'extrémité droite de la poutre. Puisque à droite de la section envisagée il y a moins de forces extérieures qu'à gauche, il est plus simple de calculer la somme M_{z_3} comme la somme des moments des forces se trouvant à droite

$$M_{z_3} = -40z_3 - 20z_3^2/2.$$

Le premier terme est le moment fléchissant de la force $F = 40$ kN, et le deuxième, celui de la charge répartie appliquée à droite de la section envisagée.

Les deux termes sont pris avec le signe moins du fait que sous l'action des charges à droite de la section la poutre fixée en pensée au droit de la section où l'on détermine M, fléchirait en haut.

En se donnant la valeur de $z_3 = 0$ et $z_3 = 2$ m, on obtient le diagramme de M pour le tronçon BC.

L'effort tranchant se détermine en utilisant la relation $Q_z = \mathrm{d}M_z/\mathrm{d}z$ ou en projetant sur la verticale les forces appliquées à la partie rejetée. Pour vérifier la validité des calculs, il est recommandé de recourir aux deux procédés.

En cherchant la dérivée de M_{z_1}, on a

$$Q_{z_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_1}\left(-20z_1 - \frac{20z_1^2}{2}\right) = -20 - 20z_1.$$

C'est l'équation d'une droite. Le même résultat s'obtient en projetant sur la verticale les forces appliquées à gauche ou à droite de la section d'abscisse z_1.

Pour une section arbitraire du tronçon EB l'effort tranchant

$$Q_{z_2} = \mathrm{d}M_{z_2}/\mathrm{d}z_2 = -60 \text{ kN}.$$

Le diagramme de Q pour le deuxième tronçon a la forme d'une droite horizontale.

En calculant Q_z comme la dérivée du moment M_{z_3}, il convient de retenir que z_3 est compté de droite à gauche, et c'est pourquoi, comme l'enseignent les mathématiques, pour obtenir le signe correct de Q il faut après la dérivation changer de signe

$$Q_{z_3} = 40 + 20z_3.$$

D'après cette équation de la droite on a construit le diagramme de Q pour le tronçon BC. Les ruptures dans ce diagramme sont égales aux forces concentrées appliquées aux tronçons correspondants de la poutre, c'est-à-dire aux réactions A et B, tout comme à la force F (à l'extrémité droite).

Exemple VI.9. Construire les diagrammes de M et de Q, ainsi que de l'effort normal N pour une poutre coudée représentée sur la figure VI.15, *a*.

Solution. La méthode générale de la détermination de M, Q et N dans une section quelconque est la même. Il faut pourtant s'entendre sur la règle de la construction des diagrammes pour les barres verticales et inclinées. Il est d'usage de tracer le diagramme de M pour toutes

les barres sur le côté concave de la barre (du côté de la fibre comprimée), c'est-à-dire d'observer la règle de construction des diagrammes des barres à disposition horizontale. Dans la section *I—I* le moment fléchissant se calcule comme la somme des moments des forces extérieures appliquées d'un côté de la section (en bas), $M_{z_1} = F_{z_1}$. Si on réalise en pensée l'encastrement suivant la section *I—I* de la partie rejetée inférieure de la barre, il devient clair que la barre fléchit à droite, c'est-à-dire que la fibre comprimée se trouve à gauche. Le

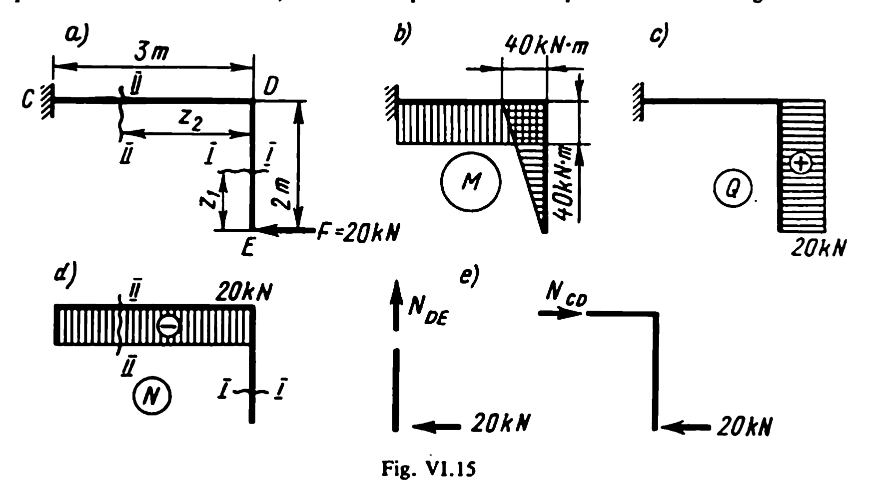


Fig. VI.15

diagramme de M_{z_1} est donc dressé à gauche (fig. VI.15, *b*). Avec $z_1 = 0$, $M = 0$, avec $z_1 =$ $= 2$ m, $M = 40$ kN · m.

En tant que somme des moments des forces appliquées à droite de la coupe, dans la section *II—II*, le moment fléchissant est égal au produit de la force par la distance jusqu'à la section égale au tronçon *DE* :

$$M_{z_2} = 2 \cdot 20 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Dans ces conditions la fibre comprimée se trouve en bas (fig. VI.15, *b*).

L'effort tranchant se calcule en appliquant la relation [VI.2] :

$$Q_z = dM_z/dz,$$

c'est-à-dire que *Q* se calcule comme la tangente de l'angle de pente de la tangente au diagramme des moments. Pour le tronçon *CD* le moment fléchissant $M =$ const ; donc, $Q = 0$. Pour la barre *DE*

$$Q = 40/2 = 20 \text{ kN}.$$

On peut déterminer également l'effort tranchant comme la somme des projections des forces appliquées d'un côté de la section sur la direction perpendiculaire à l'axe de la barre.

Le signe de l'effort tranchant est déterminé d'après la règle précédente. Mais si en regardant la barre *DE* de gauche à droite le diagramme de *M* est ascendant, alors *Q* est positif. Le graphique des valeurs positives de *Q* est construit à droite (fig. VI.15, *c*).

L'effort normal *N* est déterminé en appliquant la méthode des sections (fig. VI.15, *d*).

Pour la barre *DE*, en projetant les forces appliquées plus bas que la section *I-I* sur la direction de l'axe de la barre *DE*, on obtient $N_{DE} = 0$ (fig. VI.15, *e*). Pour la barre *CD*, en projetant les forces appliquées à droite de la section *II—II* sur la direction de l'axe de la barre *CD*, on a $N_{CD} = 20$ kN (compression).

Les valeurs négatives de *N* sont portées en bas de l'axe de la barre. Le signe moins signifie qu'il s'agit de la compression (fig. VI.15, *d*).

§ 52. Détermination des contraintes normales

Dans le cas de la flexion simple pure les sections droites de la poutre ne sont sollicitées que par des moments fléchissants passant par l'un des axes principaux de la section.

Le moment fléchissant est le moment résultant des forces normales intérieures réparties suivant la section.

Pour établir la loi de distribution et la valeur des forces intérieures subies par les sections droites, les équations de la statique ne suffisent pas. Il faut utiliser les conditions de déformation de la poutre.

Si à la surface d'une poutre (éprouvette) soumise à la flexion pure on trace un réseau, on découvre les faits suivants (fig. VI.16).

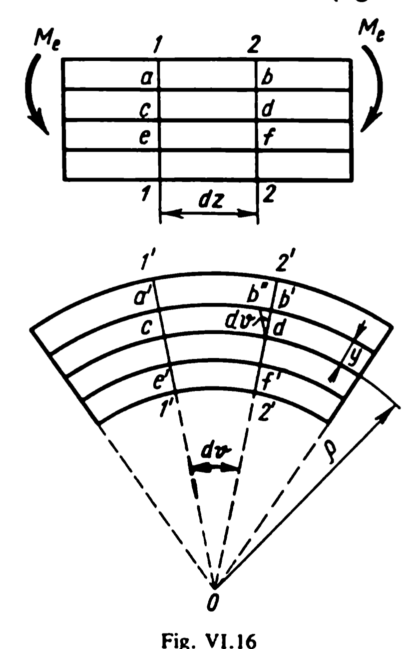


Fig. VI.16

1) Après la déformation, les lignes *1—1* et *2—2* tournent d'un certain angle $d\vartheta$ en restant droites. On peut poser que les *sections droites de la poutre, planes avant la déformation, restent planes après la déformation (hypothèse des sections planes).* Les calculs fondés sur cette hypothèse s'accordent avec l'expérience. Le réseau rectangulaire gardant sa forme après la déformation, on peut admettre que dans la section droite les contraintes tangentielles sont nulles.

2) La fibre *ab* du côté convexe de la poutre s'allonge, ce qui témoigne du fait que cette fibre subit la traction, alors que la fibre *ef* se raccourcit, ce qui témoigne de sa compression. Quant à la longueur de la fibre *cd,* elle ne

change pas, ce qui indique que cette fibre ne subit ni la traction, ni la compression.

La couche de la poutre (au niveau de la fibre *cd*) qui ne subit pas en flexion ni la traction ni la compression est dite *neutre*. La ligne d'intersection de la couche neutre avec le plan de la section droite de la poutre (fig. VI.17) s'appelle *axe* ou *ligne neutre*. L'intersection du plan de force avec le plan de la section droite s'appelle *ligne de force*.

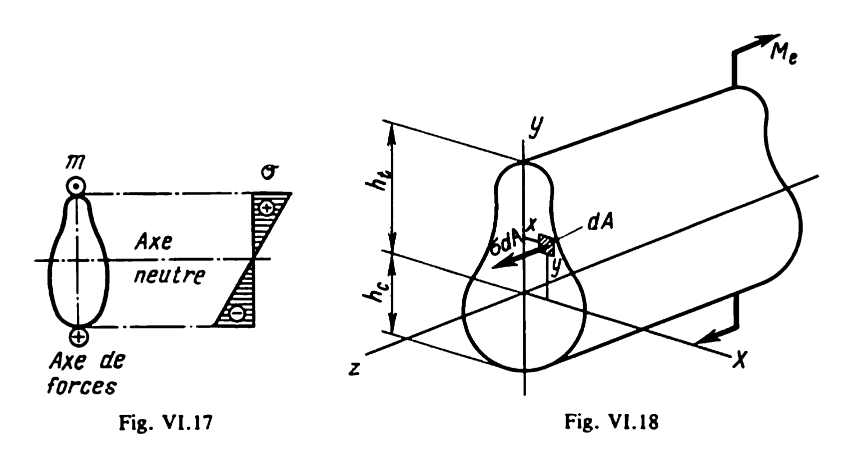


Fig. VI.17

Fig. VI.18

L'observation des résultats enregistrés par des expériences témoigne que les fibres d'une poutre se déforment d'une façon différente, les déformations étant plus grandes à mesure que les fibres s'éloignent de la couche neutre. Montrons que suivant la hauteur de la section les déformations changent d'après une loi linéaire.

En effet, le segment $b'b''$ présente l'allongement total de la fibre *ab* dont la longueur avant la déformation était égale à la longueur de la fibre *cd* appartenant à la couche neutre (cf. fig. VI.16). L'allongement relatif de cette fibre

$$\varepsilon = b'b''/ab = b'b''/cd = y\mathrm{d}\vartheta/\rho\mathrm{d}\vartheta = y/\rho, \qquad \text{(VI.4)}$$

où ρ est le rayon de courbure de la couche neutre (pour le moment sa valeur est inconnue) ; y, la distance de l'axe neutre à la fibre considérée.

Avant de passer au calcul des contraintes, introduisons encore une hypothèse : supposons que les fibres de la poutre n'influent pas l'une sur l'autre, c'est-à-dire que dans le sens perpendiculaire à l'axe les contraintes sont nulles. Par conséquent, chaque fibre subit une traction ou une compression uniaxiale. Les résultats fournis par la formule établie d'après cette hypothèse s'accordent bien avec les données empiriques. Alors, d'après la loi de Hooke, on a pour un état de contrainte uniaxial

$$\sigma = E\varepsilon = Ey/\rho, \qquad \text{(VI.5)}$$

c'est-à-dire que *la variation des contraintes normales suivant la hauteur de la section droite est proportionnelle à la distance jusqu'à l'axe neutre*. Les contraintes sont donc maximales aux bords supérieur et inférieur de la section.

Le diagramme de σ correspondant est représenté sur la figure VI.17. Les contraintes positives sont celles à la traction.

Il convient de souligner que les vecteurs des contraintes normales sont perpendiculaires au plan de la section droite de la poutre, alors que les segments qui les représentent sur le diagramme sont confondus par convention avec le plan de la section.

Après avoir établi la loi de distribution des contraintes, on peut également déterminer leur valeur à partir des équations d'équilibre. Considérons l'équilibre de la partie de la poutre soumise au moment extérieur M_e et aux forces intérieures qui apparaissent dans la section droite réalisée (fig. VI.18). L'équilibre de cette partie impose l'observation de six équations : égalité à zéro de la somme des projections des forces en action sur les trois axes des coordonnées et égalité à zéro des sommes des moments par rapport aux axes x, y, z.

1. Annulons la somme des projections sur l'axe y : $\sum Y = 0$.

2. Annulons la somme des projections sur l'axe x : $\sum X = 0$.

$\sum Y = 0$ et $\sum X = 0$ se transforment en identités du fait que les forces intérieures $\sigma \, \mathrm{d}A$ sont perpendiculaires à ces axes.

3. Annulons la somme des projections sur l'axe z :

$$\sum Z = 0 \quad \text{ou} \quad \int_Z y \mathrm{d}A = 0.$$

En appliquant la formule (VI.5), nous avons

$$\frac{E}{\rho} \int_A y \mathrm{d}A = 0.$$

Mais $E/\rho \neq 0$ vu que $\rho \neq \infty$, car la poutre envisagée est fléchie. Donc, $\int_A y \mathrm{d}A = 0$.

Cette intégrale est le moment statique de l'aire de la section droite de la poutre par rapport à l'axe neutre. Elle est nulle et, par conséquent, *en flexion, l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section*.

4. L'équation $\sum M_z = 0$ se transforme en identité parce que les efforts $\sigma \mathrm{d}A$ sont parallèles à l'axe z.

5. L'équation $\sum M_y = 0$ donne $\int_A \sigma \mathrm{d}A x = 0$. En recourant à la formu-

le (VI.5), on obtient

$$\frac{E}{\rho}\int_A xy\mathrm{d}A = 0.$$

Mais $E/\rho \neq 0$; donc, $\int_A xy\mathrm{d}A = 0$. L'intégrale $I_{xy} \equiv D_{xy} = \int_A xy\mathrm{d}A$ est le moment d'inertie centrifuge de la section par rapport aux axes x et y. Etant donné qu'il est nul, x et y doivent être des axes principaux de la section et le moment M_e doit reposer dans le plan passant par l'un des axes principaux, ce qui est le cas de la flexion simple. Cette condition entraîne également que la *ligne de force et l'axe neutre sont réciproquement perpendiculaires.*

6. Annulons la somme des moments des forces par rapport à l'axe x :

$$\sum M_x = 0\ ;\ -M_e + \int_A y\sigma\,\mathrm{d}A = 0.$$

On tire de la formule (VI.5) :

$$M_e = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A.$$

L'intégrale $I_x = \int_A y^2\mathrm{d}A$ est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre x.

La partie rejetée de la poutre peut subir non seulement le moment extérieur, mais aussi plusieurs moments, ainsi que toute autre charge. Dans l'équation d'équilibre $\sum M_x = 0$ figure alors la somme algébrique des moments de toutes ces forces égale au moment fléchissant M subi par la section droite. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, écrivons la dernière relation sous la forme

$$M = EI_x/\rho, \tag{VI.6}$$

d'où

$$1/\rho = M/(EI_x). \tag{VI.7}$$

La quantité $K = 1/\rho$ est la *courbure de la couche neutre de la poutre.*

Un peu plus haut nous avons montré que dans la section droite l'axe neutre passe par le centre de gravité. Donc, l'axe longitudinal de la poutre, qui est l'ensemble des centres de gravité de ses sections droites, se confond avec l'axe neutre. Il s'ensuit que l'expression (VI.7) détermine la courbure de la poutre.

Résumons : *en flexion, la courbure de l'axe d'une poutre est proportionnelle au moment fléchissant et inversement proportionnelle à la grandeur EI_x* appelée *rigidité de la poutre.*

En portant la valeur obtenue de $1/\rho$ dans (VI.5), on amène la formule d'un grand intérêt :

$$\sigma = My/I_x, \qquad \textbf{[VI.8]}$$

qui permet, d'après le moment fléchissant M et le moment d'inertie de la section, de calculer la contrainte normale en tout point de la section droite. La formule [VI.8] est déduite pour la flexion pure.

La flexion simple engendre dans les sections droites des contraintes normales et tangentielles. Les contraintes tangentielles provoquent la déformation de cisaillement qui fait que les sections droites cessent d'être planes, ce qui invalide l'hypothèse de Bernoulli. D'autre part, en flexion simple apparaissent des contraintes dans les sections longitudinales, c'est-à-dire que les fibres exercent les unes sur les autres une pression.

Des études plus poussées montrent que pour la flexion simple, les résultats de la formule [VI.8] sont satisfaisants.

§ 53. Conditions de la résistance par rapport aux contraintes normales

Pour assurer la résistance d'une poutre fléchie dans la section dangereuse (section où M est maximal), il faut que les contraintes de traction et de compression maximales ne dépassent pas les contraintes admissibles correspondantes (on ne considère que les poutres à section droite constante sur toute la longueur).

Introduisons la notation (fig. VI.18) : h_t pour la plus grande distance entre l'axe neutre et la fibre tendue ; h_c, la distance entre l'axe neutre et la fibre la plus comprimée. Alors, en flexion, la contrainte de traction maximale

$$\max \sigma_t = Mh_t/I_x ; \qquad (VI.9)$$

la contrainte de compression maximale (en valeur absolue)

$$\max \sigma_c = Mh_c/I_x. \qquad (VI.10)$$

Pour les matériaux fragiles (par exemple, la fonte), les contraintes à la traction et à la compression admissibles sont différentes : σ^c_{adm} est de trois à cinq fois plus grande que σ^t_{adm} ; donc, pour les poutres en tels matériaux, on choisit ordinairement des sections asymétriques par rapport à l'axe neutre. La section est alors établie de la sorte que $h_t < h_c$, c'est-à-dire de façon à assurer l'inégalité $\max \sigma_t < \max \sigma_c$. Dans les cas considérés, il faut composer deux conditions de résistance :

suivant les contraintes de traction maximales

$$\max \sigma_t = Mh_t/I_x = M/W_{x,t} \leqslant \sigma^t_{adm} ; \quad \text{(VI.11)}$$

suivant les contraintes de compression maximales

$$\max \sigma_c = Mh_c/I_x = M/W_{xc} \leqslant \sigma^c_{adm}, \quad \text{(VI.11a)}$$

où W_{xt} et W_{xc} sont les couples de réaction des fibres tendue et comprimée.

Dans les formules (VI.11) et (VI.11a) il faut porter la valeur (absolue) maximale de M.

Si la section de la poutre est symétrique par rapport à l'axe neutre (ces sections sont avantageuses pour les poutres en matériaux plastiques), c'est-à-dire si $h_t = h_c = h/2$, alors les deux formules (VI.9) et (VI.10) se ramènent à une seule :

$$\sigma = (M/I_x)(h/2). \quad \text{(VI.12)}$$

En désignant $W_x = 2I_x/h$, on obtient pour les mêmes contraintes admissibles à la traction et à la compression σ_{adm} la condition de résistance suivante :

$$\sigma = M/W_x \leqslant \sigma_{adm}. \quad \text{[VI.13]}$$

La grandeur W_x s'appelle *couple de réaction axial* ou *couple de réaction à la flexion*. Le couple de réaction est une caractéristique géométrique de la section droite d'une poutre, qui détermine sa résistance à la flexion.

Dans le cas des sections les plus simples, les valeurs de W_x sont :

pour un rectangle :

$$W_x = 2I_x/h = bh^3/(12h/2) = bh^2/6 ;$$

pour un cercle :

$$W_x = 2I_x/d = \pi d^4/(64d/2) = \pi d^3/32 \approx 0{,}1d^3 ;$$

pour un anneau :

$$W_x = \frac{2I_x}{D} = \frac{\pi D^4(1 - c^4)}{64D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4) \approx 0{,}1D^3(1 - c^4) ;$$

pour des sections laminées (en U, en H, etc.) les valeurs de W_x sont données par les tableaux des normes. Le choix de la section d'une poutre se fait d'après la relation tirée de l'équation [VI.13] :

$$W_x \geqslant M/\sigma_{adm}. \quad \text{[VI.14]}$$

Le moment fléchissant admissible

$$M_{adm} \leqslant W_x\sigma_{adm}. \quad \text{[VI.15]}$$

Ensuite, la liaison entre M et la charge (d'après le diagramme de M construit) étant connue, on peut calculer la charge admissible.

Exemple VI.10. Choisir la section d'une poutre en U à travée $l = 6$ m, sollicitée par une charge uniformément répartie $q = 40$ kN/m ; $\sigma_{adm} = 160$ MPa $= 160 \cdot 10^3$ kPa (cf. fig. VI.12).

Solution. Pour ce cas le moment fléchissant maximal est appliqué à la section du milieu de la poutre

$$M = ql^2/8 = 40 \cdot 36/8 = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Le couple de réaction nécessaire

$$W_x = M/\sigma_{adm} = 180/(160 \cdot 10^3) = 0{,}001125 \text{ m}^3 = 1125 \text{ cm}^3.$$

Choisissons, d'après les tableaux des normes, la poutre en U n° 45 pour laquelle $W_x = 1231$ cm³ (W_x présente alors une sous-charge inférieure à 5 %, ce qui est admissible).

Dans cet exemple et dans ceux qui suivent figurent les données tirées de la nouvelle norme (GOST 8239-72).

Exemple VI.11. Calculer la charge admissible d'une poutre à section droite rectangulaire (fig. VI.19) si $\sigma_{adm} = 10$ MPa ; $a = 1$ m.

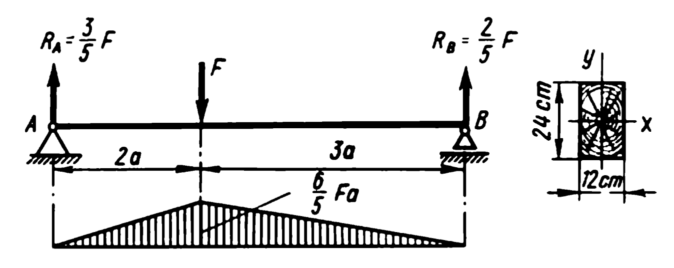


Fig. VI.19

Solution. Déterminons le moment fléchissant admissible

$$M_{adm} = W_x \sigma_{adm} = \frac{bh^2}{6} \sigma_{adm} = \frac{12 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}}{6} 10 = 0{,}0115 \text{ MN} \cdot \text{m}.$$

Pour calculer la charge admissible, il faut connaître la relation entre le moment fléchissant maximal et la charge ; à cet effet, il faut construire le diagramme du moment fléchissant.

En calculant les réactions, on trouve que

$$R_A = 3/5\, F ; \quad R_B = 2/5\, F.$$

Le moment fléchissant maximal est enregistré au droit de la section subissant la charge

$$M = R_A 2a = 6/5\, Fa.$$

Maintenant, on peut calculer la charge admissible

$$F_{adm} = \frac{5}{6a} M_{adm} = \frac{5}{6 \cdot 1} 0{,}0115 = 0{,}0096 \text{ MN} = 9{,}6 \text{ kN} = 9600 \text{ N}.$$

§ 54. Calcul des contraintes tangentielles

Dans le cas général de la flexion (flexion simple) les sections droites d'une poutre subissent des moments fléchissants et des efforts tranchants. La présence du moment fléchissant est associée à l'apparition dans les sec-

tions droites des contraintes normales qui peuvent être déterminées par la formule [VI.8] (cf. § 52).

La présence de l'effort tranchant est due à l'apparition des contraintes tangentielles dans les sections droites et, en vertu de la loi de la parité, aussi dans les sections longitudinales (fig. VI.20). Pour déterminer les contrain-

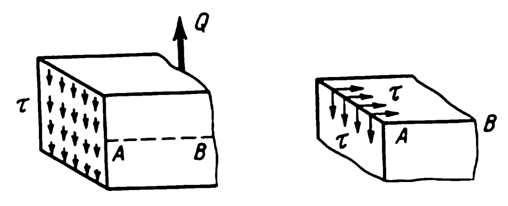


Fig. VI.20

tes tangentielles, examinons d'abord une poutre peu large à section rectangulaire (fig. VI.21). Découpons dans la poutre un élément de longueur dz et de largeur b, égale à celle de la poutre. Cet élément subit l'action des forces suivantes : la face *344'3'* est sollicitée par les contraintes tangentielles qui valent d'après la formule [VI.8]

$$\sigma_1 = M_1 y / I_x, \qquad \text{(a)}$$

où M_1 est le moment fléchissant dans la section *344'3'*.

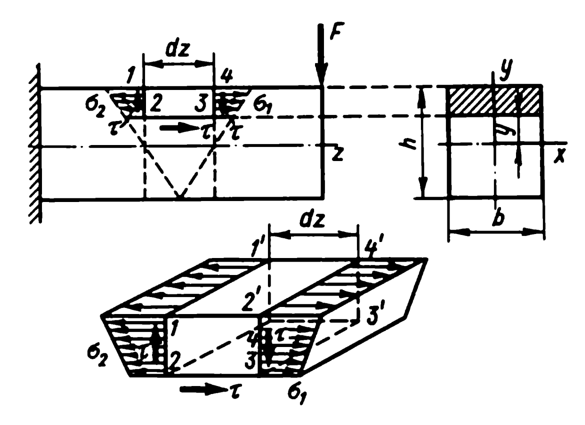


Fig. VI.21

D'autre part, la section envisagée subit des contraintes tangentielles τ pour le moment inconnues qui, compte tenu de la petite largeur de la poutre, peuvent être considérées comme uniformément réparties suivant la largeur de la section * ;

* Cette supposition porte le nom d'*hypothèse de Jouravski*.

la face *122′1′* subit des contraintes normales

$$\sigma_2 = M_2 y / I_x \qquad \text{(b)}$$

et les contraintes tangentielles τ ;

la face *322′3′* est sollicitée seulement par des contraintes tangentielles égales, d'après la loi de la parité, aux contraintes tangentielles qui interviennent dans les faces verticales.

Composons l'équation d'équilibre de l'élément découpé. Projetons les forces supportées par l'élément sur l'axe horizontal. Il est clair que les efforts tangentiels qui agissent suivant les faces verticales ne figurent pas dans l'équation indiquée.

Suivant la face *233′2′* l'effort tangentiel se projette en grandeur réelle $\tau\, b\mathrm{d}z$. La résultante des efforts normaux subis par la face *344′3′* s'écrit

$$N_1 = \int_{A'} \sigma_1 \mathrm{d}A.$$

La résultante des efforts normaux appliqués à la face *122′1′* est de la forme

$$N_2 = \int_{A'} \sigma_2 \mathrm{d}A.$$

Les intégrales doivent être calculées pour l'aire de la partie rejetée, c'est-à-dire par rapport aux aires des faces *122′1′* et *344′3′*. En utilisant l'équation d'équilibre $\sum Z = 0$, on amène

$$-N_2 + N_1 + \tau b \mathrm{d}z = 0$$

ou

$$-\int_{A'} \sigma_2 \mathrm{d}A + \int_{A'} \sigma_1 \mathrm{d}A + \tau b \mathrm{d}z = 0.$$

L'application des expressions (a) et (b) donne

$$-\frac{M_2}{I_x} \int_{A'} y \mathrm{d}A + \frac{M_1}{I_x} \int_{A'} y \mathrm{d}A + \tau b \mathrm{d}z = 0.$$

L'expression $\int_{A'} y \mathrm{d}A = S_x'$ est le *moment statique de l'aire* de la partie rejetée *par rapport à l'axe neutre*. Donc,

$$\frac{S_x'}{I_x}(M_2 - M_1) = \tau b \mathrm{d}z.$$

Mais $M_2 - M_1 = dM_z$ est l'accroissement du moment fléchissant sur la longueur dz. De cette facon, la formule précédente peut se récrire sous la forme

$$S_x' dM_z/I_x = \tau b\, dz,$$

d'où

$$\tau = S_x' dM_z/(I_x b dz).$$

En appliquant la relation [VI.2], on obtient finalement

$$\tau = QS_x'/(I_x b). \qquad \text{[VI.16]}$$

Cette relation a été établie pour la première fois par D. Jouravski et porte son nom *.

Etudions la loi de distribution suivant la section des contraintes tangentielles dans une poutre de section rectangulaire (fig. VI.22). Cette loi est

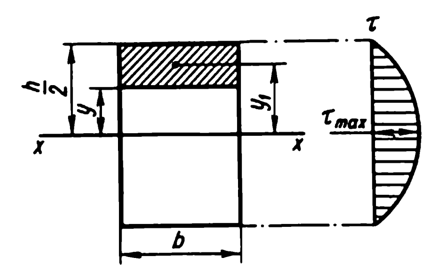


Fig. VI.22

déterminée par la loi de variation de S_x' pour la section donnée, les autres quantités étant constantes ; de plus,

$$I_x = bh^3/12.$$

Le moment statique de l'aire hachurée par rapport à l'axe x

$$S_x' = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

C'est l'équation d'une parabole.

La contrainte tangentielle

$$\tau = \frac{Qb(h^2/4 - y^2)12}{bh^3 \cdot 2b} = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

* Les tableaux des normes des poutres en U et en H (cf. annexe) fournissent les données sur le moment statique de la moitié de l'aire de ces profils.

Construisons le diagramme de τ d'après les trois points

$$\tau_{y=h/2} = 0 \; ; \; \tau_{y=0} = 3Q/(2A) \; ; \; \tau_{y=-h/2} = 0.$$

Le diagramme de τ est représenté sur la figure VI.22. Pour une poutre de section rectangulaire, la contrainte tangentielle maximale se manifeste au niveau de l'axe neutre

$$\tau_{max} = 3Q/(2A), \qquad \text{[VI.17]}$$

c'est-à-dire de 1,5 fois plus grande que la contrainte qui s'obtient sous l'hypothèse de la distribution uniforme des contraintes tangentielles suivant la section.

Avec une certaine approximation, la formule de Jouravski peut s'employer pour le calcul des contraintes tangentielles dans les poutres à section droite d'une autre forme. Pour une section circulaire, on obtient d'une manière analogue le diagramme de τ (fig. VI.23) à valeur maximale

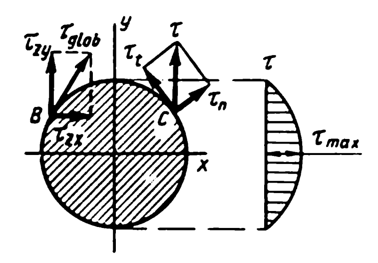


Fig. VI.23

sur l'axe neutre

$$\tau_{max} = 4Q/(3A). \qquad \text{[VI.18]}$$

Pour une section annulaire,

$$\tau_{max} = 2Q/A. \qquad \text{(VI.19)}$$

Il convient d'insister que, d'après la formule de Jouravski, on détermine les contraintes tangentielles parallèles à l'effort tranchant, c'est-à-dire τ ou τ_{zy} verticaux (fig. VI.23). Quant aux contraintes tangentielles totales, elles doivent être orientées suivant la tangente au contour de la section.

Considérons, par exemple, le point C près du contour d'une section circulaire. Si l'on suppose que la formule de Jouravski permet de calculer la contrainte totale τ, en la décomposant, on obtient deux composantes, l'une suivant la normale au contour (τ_n) et l'autre suivant la tangente (τ_t).

Cependant, par condition de sollicitation la surface de la barre ne subit pas de contraintes ; donc, τ_n doit être nulle. Par conséquent, la contrainte τ, calculée d'après la formule de Jouravski, ne peut pas être une contrainte tangentielle totale, elle ne représente que sa composante verticale τ_{zy}

(fig. VI.23, point B). La composante horizontale de la contrainte totale τ_{zx} et la contrainte totale elle-même τ_{tot} en ces points du contour restent inconnues, ne pouvant pas être déterminées par les méthodes de la résistance des matériaux.

L'analyse des solutions exactes de la théorie de l'élasticité montre que dans la plupart des cas les composantes horizontales des contraintes tangentielles ne sont pas grandes.

Pour les poutres en H, le diagramme de τ est d'une forme à gradins par suite du changement brusque de la largeur de la poutre * (fig. VI.24, *a*).

Dans une section en H, la contrainte tangentielle maximale est appliquée aux points de l'axe neutre et définie par la formule de Jouravski en prenant le moment statique de l'aire hachurée (demi-section). Les tableaux des normes donnent les valeurs du moment statique de l'aire de la demi-section des poutres en H et en U. La figure VI.24, *b* représente les diagrammes de τ de certaines autres sections.

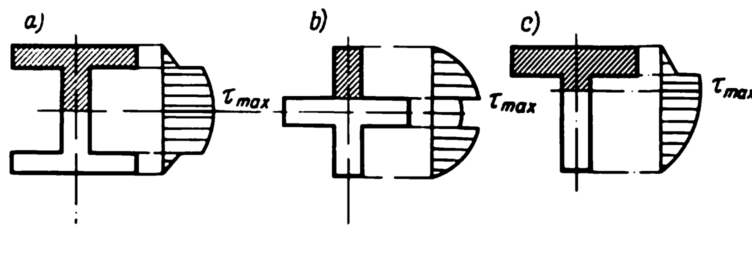


Fig. VI.24

La condition de résistance par rapport aux contraintes tangentielles s'écrit

$$\tau_{max} \leqslant \tau_{adm},$$

où τ_{adm} est la contrainte tangentielle admissible. Pour les poutres en acier $\tau_{adm} \approx 0{,}6\ \sigma_{adm}$.

Certains matériaux résistent très mal au cisaillement (par exemple, le bois dans le sens des fibres) ; aussi, pour les poutres en tels matériaux la vérification de la résistance par rapport aux contraintes tangentielles est obligatoire.

La théorie exposée de la détermination des contraintes tangentielles n'est valable que pour des sections pleines.

Comme nous l'avons déjà dit, dans les barres à parois minces, même lorsque l'un des axes centraux principaux se confond avec le plan de force

* Il convient de retenir que la partie du diagramme relative aux ailes de la poutre est très conventionnelle du fait que l'hypothèse de la distribution uniforme des contraintes tangentielles suivant la largeur est ici inapplicable. En tenant compte de ce fait le diagramme de τ des sections droites des poutres en H n'est construit généralement que dans les limites de l'âme.

de la section, on peut observer le phénomène de la torsion. Pour mieux le comprendre, considérons une console de profil en U (fig. VI.25, *a*).

Coupons par le plan *I* une partie de la poutre portant la charge et considérons la partie rejetée du côté de l'encastrement pour voir la section représentée sur la figure VI.25, *b*. Les contraintes tangentielles τ_y subies par l'âme verticale se calculent suivant la formule de Jouravski [VI.16].

Si l'on néglige par suite de leur petitesse les contraintes tangentielles supportées par les ailes, la résultante des contraintes tangentielles τ_y dans l'âme donne la force R_2 égale à Q (fig. VI.25, *c*).

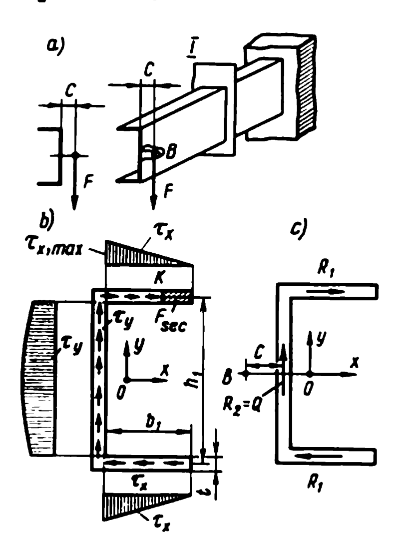


Fig. VI.25

Les ailes horizontales sont soumises aux contraintes tangentielles τ_x. Si l'on admet que leur distribution suivant l'âme est uniforme (par suite de sa petite largeur), leur calcul peut se faire également d'après la formule de Jouravski [VI.16].

En un point quelconque *K* de la section (fig. VI.25, *b*), les contraintes tangentielles sont

$$\tau_x = QS_x'/(I_x t),$$

où t est l'épaisseur de l'aile en K ; $S_x' = F'h_1/2$, le moment statique par rapport à l'axe de l'aire rejetée F' de l'aile ; I_x, le moment d'inertie de la section ; Q, l'effort tranchant dans la section.

La contrainte maximale subie par l'aile τ_{max} est appliquée au droit de la jonction de l'aile avec l'âme. Pour ce cas, $S_x' = bth_1/2$. Donc,

$$\tau_{max} = Qb_1h_1/(2I_x).$$

La résultante des contraintes tangentielles R_1 dans l'aile est égale au produit de l'aire du diagramme des contraintes tangentielles par l'épaisseur de l'aile

$$R_1 = \tau_{max} t b_1/2 = Q b_1^2 h_1 t/(4I_x).$$

L'aile inférieure subit la même force R_1, mais dirigée dans le sens opposé. Deux forces R_1 forment un couple de moment

$$M_1 = R_1 h_1 = Q b_1^2 h_1^2 t/(4I_x).$$

Par conséquent, la section d'une poutre en U subit en plus de l'effort tranchant vertical $Q = R_2$, un moment de torsion $T = M_1$ (fig. VI.25, *b*).

Dans la section, il existe un point B tel qu'en flexion, par rapport à ce point, le moment des forces tangentielles est nul. Ce point s'appelle *centre de flexion*. Sa position est établie sans peine à partir de l'équation

$$\sum M_B = T - Qc = 0,$$

d'où $c = T/Q$.

En y portant la valeur de $T = M_1$, on trouve

$$c = b_1^2 h_1^2 t/(4I_x).$$

Par conséquent, pour interdire en flexion la manifestation de la torsion, la force extérieure doit être appliquée au centre de flexion (fig. VI.25, *a*). Dans ce cas, la somme des moments des forces extérieures et intérieures par rapport à n'importe quel point de la section droite est nulle.

Notons que si la section possède deux axes de symétrie, le centre de flexion coïncide avec le centre de gravité.

§ 55. Contraintes subies par les sections obliques d'une poutre. Contraintes principales

Il est établi que les sections droites d'une poutre sont soumises à des contraintes normales et tangentielles, alors que les sections longitudinales, seulement aux contraintes tangentielles *.

Dans les sections obliques d'une poutre, par exemple suivant l'aire *bc* (fig. VI.26), apparaissent des contraintes normales et tangentielles dont le calcul peut se faire en appliquant les formules du § 16.

Pour déterminer les contraintes principales faisons appel à la formule [II.37] :

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \sigma/2 \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2.$$

---

* Dans les limites des ailes de faible épaisseur des profilés les contraintes tangentielles ne sont pas grandes et ne sont pas représentées sur le diagramme de τ (cf. fig. VI.27).

L'angle d'inclinaison des aires principales est donné par la formule [II.35] :

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = 2\tau/\sigma.$$

Les contraintes tangentielles maximales appliquées aux aires qui forment avec les aires principales un angle de ±45° se déterminent d'après la formule (II.32) :

$$\tau_{\substack{max \\ min}} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2 = \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2.$$

Cette formule montre que la valeur des contraintes principales $\sigma_{\substack{max \\ min}}$ et des contraintes tangentielles maximales $\tau_{\substack{max \\ min}}$ est minimale aux points de la

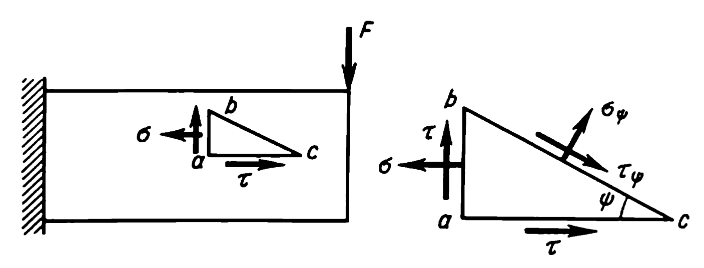


Fig. VI.26

section droite, où les contraintes normales et tangentielles sont importantes. Pour une poutre en H, par exemple, les contraintes principales sont ordinairement vérifiées pour le point B (point supérieur ou inférieur de la jonction des ailes avec l'âme (fig. VI.27)). Pourtant on a également intérêt à établir si l'augmentation des contraintes tangentielles ne déplace pas en bas le point dangereux. C'est un problème intéressant et nous proposons au lecteur de le résoudre lui-même.

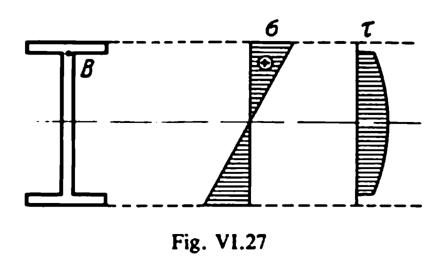


Fig. VI.27

Il est également clair que suivant la longueur de la poutre les contraintes principales doivent être vérifiées pour les sections où les valeurs du moment fléchissant (qui détermine σ) et de l'effort tranchant (qui détermine τ) sont simultanément maximales.

§ 56. Concentration des contraintes en flexion

Au droit de la variation brusque du contour de la section longitudinale de la poutre, l'allure de la distribution des contraintes change brusquement et on observe alors leur concentration (fig. VI.28, *a*). Pour atténuer cette dernière, il faut éliminer les variations brusques du contour de la section longitudinale, en réalisant des raccords progressifs ou congés de raccordement (fig. VI.28, *b*).

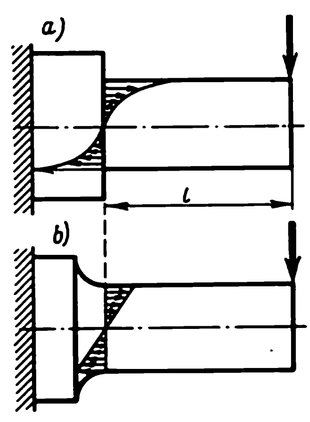


Fig. VI.28

Pour des matériaux peu plastiques et fragiles, l'influence de la concentration des contraintes sur la résistance statique est évaluée soit par le *coefficient théorique de la concentration* des contraintes α_σ calculé d'après les méthodes de la théorie de l'élasticité, soit par le *coefficient efficace de la concentration* K_σ défini expérimentalement. A cet effet, on établit la charge de rupture à la flexion pour une éprouvette sans concentration des contraintes σ_u et cette même grandeur pour une éprouvette susceptible de concentration $\sigma_{u,c}$.

Le quotient $K_\sigma = \sigma_u/\sigma_{u,c}$ détermine pour l'éprouvette le coefficient efficace de la concentration. La valeur de K_σ est donnée par les ouvrages de référence.

Sous l'action des charges répétées (calcul à l'endurance) la concentration des contraintes est prise en considération pour tous les matériaux qu'ils soient fragiles ou plastiques.

§ 57. Energie potentielle de la déformation en flexion

En flexion ainsi que sous d'autres déformations, le travail fourni par les forces extérieures est absorbé par la variation de l'énergie potentielle du corps de la barre déformée.

De même qu'il en a été pour une force extérieure concentrée (cf. formule [II.44]), on peut montrer que le travail du moment extérieur M_e peut se calculer d'après la formule

$$W = M_e\vartheta/2, \tag{VI.20}$$

où ϑ est l'angle de rotation de la section au droit de l'application du moment.

Le travail élémentaire du moment fléchissant peut se calculer d'après la formule analogue à (II.45) :

$$\mathrm{d}W_i = -M\mathrm{d}\vartheta/2.$$

Or, en flexion on a (cf. fig. VI.16)

$$\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}z/\rho.$$

Pour la courbure on a obtenu précédemment l'expression (VI.7) :

$$1/\rho = M/(EI_x),$$

donc

$$\mathrm{d}W_i = -\frac{1}{2}\frac{M^2}{EI_x}\mathrm{d}z.$$

Pour une poutre de longueur l le travail total des moments fléchissants

$$W_i = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI_x}\mathrm{d}z. \tag{VI.21}$$

L'énergie potentielle de la flexion égale au travail des forces intérieures pris avec le signe opposé, se détermine suivant la formule

$$U = -W_i = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2\mathrm{d}z}{EI_x}. \qquad \text{[VI.22]}$$

Dans le cas général de la flexion, en plus des moments fléchissants, les sections droites d'une poutre sont sollicitées par des efforts tranchants. Pourtant, l'énergie potentielle du cisaillement qui correspond au travail de l'effort tranchant est, comme le montrent les recherches, peu grande et ordinairement on la néglige. C'est pourquoi la formule [VI.22] convient aussi bien à la flexion pure qu'au cas général de la flexion.

CHAPITRE VII

FLEXION. DÉTERMINATION DES DÉPLACEMENTS

§ 58. Equation différentielle de l'axe fléchi d'une poutre

Sous l'action d'une charge une poutre fléchit. Ses sections se déplacent perpendiculairement * à l'axe initialement droit, tout en tournant simultanément (fig. VII.1).

Le déplacement du centre de gravité de la section dans la direction perpendiculaire à l'axe s'appelle *flèche* (notée f) au point (section) donné. L'angle ϑ de la rotation de la section par rapport à sa position initiale s'appelle *angle de rotation de la section*. Si l'on tient compte que la section

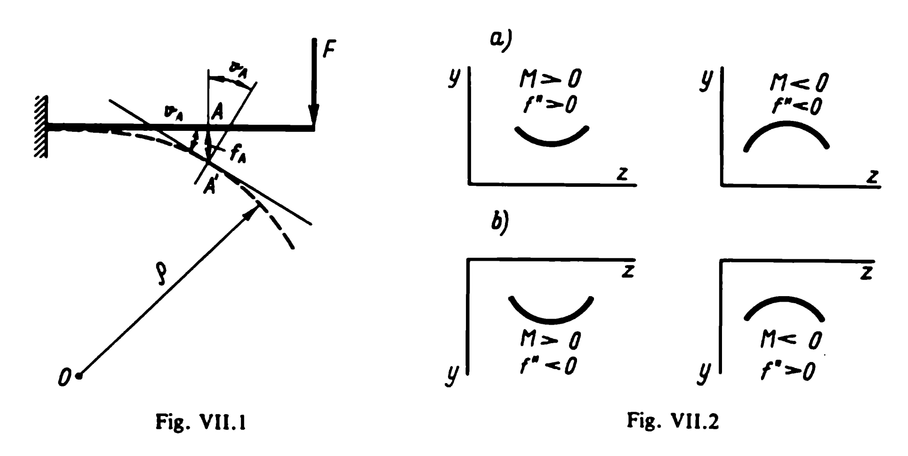


Fig. VII.1

Fig. VII.2

tournée est perpendiculaire à l'axe fléchi, on tire la conclusion qu'au lieu de calculer l'angle de rotation on peut déterminer l'angle qui lui est égal entre la tangente en ce point de l'axe fléchi et l'axe initial (fig. VII.1, où la flèche et l'angle de rotation sont donnés pour le point A).

---

* En toute rigueur, les centres de gravité des sections droites d'une poutre subissent en flexion des déplacements perpendiculaires à l'axe, mais aussi des déplacements le long de l'axe, ces derniers étant si petits par rapport aux premiers qu'on ne les prend pas en considération.

Pour déterminer les déformations d'une poutre, profitons de l'équation

$$K = 1/\rho = M/(EI), \qquad \text{(VII.1)}$$

qui associe la courbure de l'axe au moment fléchissant et à la rigidité de la section (cf. § 52).

Le cours des mathématiques donne la formule suivante pour la courbure d'une ligne :

$$K = \pm f''/[1 + (f')^2]^{3/2}, \qquad \text{(VII.2)}$$

où $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}z$; $f'' = \mathrm{d}^2f/\mathrm{d}z^2$.

En portant cette valeur de K dans la formule (VII.1), on obtient

$$\pm f''/[1 + (f')^2]^{3/2} = M/(EI). \qquad \text{(VII.3)}$$

(VII.3) est une équation différentielle exacte de l'axe fléchi d'une poutre (ligne élastique). L'intégration de cette équation non linéaire présente de grandes difficultés. Pourtant, pour la plupart des problèmes pratiques, la quantité $(f')^2 = \mathrm{tg}^2\vartheta \approx \vartheta^2$ peut être négligée par suite de la petitesse des déformations devant l'unité.

Les valeurs réelles des angles de rotation des sections est de l'ordre des millièmes de radian. Si même on adopte $\vartheta = 0{,}01$ rd, dans ce cas-là aussi la quantité $\vartheta^2 = (f')^2$ est négligeable par rapport à l'unité.

En rejetant $(f')^2$ du dénominateur de la formule (VII.3), on obtient l'équation différentielle approchée de l'axe fléchi

$$\pm EIf'' = M, \qquad \text{(VII.4)}$$

dont l'intégration ne présente pas de difficultés. Le choix du signe est déterminé par le système de coordonnées adopté. Pour le système de la figure VII.2, *a* on a les mêmes signes pour la courbure $K \approx f''$ et le moment M.

Par conséquent, dans ce système de coordonnées l'équation (VII.4) doit être appliquée sous la forme

$$EIf'' = M. \qquad \textbf{[VII.5]}$$

Pour le système de coordonnées adopté sur la figure VII.2, *b*, f'' et M ont des signes différents. Par conséquent, pour ce cas l'équation (VII.4) doit s'écrire

$$EIf'' = -M. \qquad \text{(VII.6)}$$

Par la suite, nous utiliserons le système de coordonnées représenté sur la figure VII.2, *a* et l'équation différentielle de l'axe fléchi sous la forme [VII.5].

Pour calculer les angles de rotation $\vartheta \approx f'$ et les flèches f, il faut intégrer l'équation [VII.5], ce qui peut se faire de trois façons, par la méthode analytique, grapho-analytique et graphique.

Examinons le mode analytique. En intégrant une fois l'équation [VII.5], on aboutit à l'équation de l'angle de rotation

$$EIf' = \int M \mathrm{d}z + C, \tag{VII.7}$$

où C est la constante d'intégration.

En l'intégrant une deuxième fois, on obtient l'équation des flèches

$$EIf = \int \mathrm{d}z \int M \mathrm{d}z + Cz + D, \tag{VII.8}$$

où D est la deuxième constante d'intégration.

Les constantes d'intégration C et D sont déterminées à partir des conditions d'appui de la poutre (conditions aux limites). Ainsi, pour une poutre encastrée par une extrémité (cf. fig. VII.1) au droit de l'encastrement la flèche, tout aussi bien que l'angle de rotation de la section, doit être nulle. Pour une poutre reposant sur les deux extrémités, à ces deux extrémités, la flèche doit être nulle.

En calculant les constantes d'intégration, on peut déterminer à l'aide des équations (VII.7) et (VII.8) l'angle de rotation et la flèche d'une section quelconque.

Dans de nombreux cas, d'après les critères de service, les flèches maximales des poutres sont limitées par une grandeur définie, la *flèche admissible* f_{adm}. Celle-ci dépend de la destination de l'ouvrage ou de la machine. Par exemple, pour les poutres de pont roulant on adopte

$$f_{adm} = (1/600 \text{ à } 1/700)l,$$

où l est la travée de la poutre.

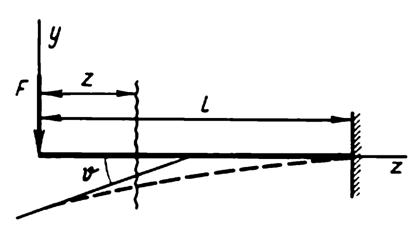


Fig. VII.3

En construction mécanique, la norme de la flèche maximale varie dans des limites assez larges ; on adopte suivant la destination de la pièce

$$f_{adm} = (1/1000 \text{ à } 1/300)l.$$

Les angles d'inclinaison maximaux des sections d'appui des arbres sur les paliers à rouleaux ne doivent pas dépasser 0,001 rd.

Exemple VII.1. Déterminer f_{max} et ϑ_{max} pour une console chargée par une force concentrée à l'extrémité (fig. VII.3).

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre. Dans la section d'abscisse z le moment fléchissant est calculé comme le moment des forces extérieures appliquées entre la section et l'origine des coordonnées :

$$M_z = -Fz.$$

Donc,

$$EIf'' = -Fz.$$

Intégrons la première fois :

$$EIf' = -Fz^2/2 + C.$$

Intégrons la deuxième fois :

$$EIf = -Fz^3/6 + Cz + D.$$

Pour déterminer C et D, on a les conditions suivantes :
1) pour $z = l$, $f = 0$; 2) pour $z = l$, $\vartheta = f' = 0$.
De la deuxième condition on tire $C = Fl^2/2$. La première condition donne $0 = -Fl^3/6 + Fl^3/2 + D$, d'où $D = -Fl^3/3$. Maintenant, on peut calculer f_{max} et ϑ_{max}. Il est pratiquement clair qu'ils ont lieu avec $z = 0$. En posant dans les formules $z = 0$, il vient

$$f'_{max} = \vartheta_{max} = Fl^2/(2EI) \; ; \; f_{max} = -Fl^3/(3EI). \qquad \text{(VII.9)}$$

La valeur positive de l'angle de rotation ϑ montre que la section tourne dans le sens antihoraire. La valeur négative de f montre que le centre de gravité de la section se déplace en bas, c'est-à-dire dans le sens des valeurs négatives des ordonnées de f.

Portons notre attention sur le fait que

$$C = EI\vartheta_0 \qquad \text{(VII.10)}$$

et

$$D = EIf_0, \qquad \text{(VII.11)}$$

où f_0 est la flèche à l'origine des coordonnées ; ϑ_0, l'angle de rotation à l'origine des coordonnées.

Si l'on calcule les moments fléchissants des forces appliquées entre la section et l'origine des coordonnées des poutres à un seul tronçon sollicité, les relations (VII.10) et (VII.11) sont toujours valables. Ceci reste également valable pour les poutres quel que soit le nombre de tronçons sollicités, si l'intégration indéfinie de l'équation (VII.5) est remplacée par le mode de l'intégration définie (cf. § 59).

En chargeant l'éprouvette d'après la figure VII.3, il est très simple de déterminer le module d'élasticité du matériau. Supposons qu'à la charge F_1 correspond la flèche f_1 de l'extrémité de l'éprouvette. Alors, la formule (VII.9) donne la valeur du module d'élasticité.

$$E = F_1 l^3/(3If_1).$$

La détermination du module d'élasticité par essais des éprouvettes à la traction est une procédure plus compliquée.

§ 59. Déplacements dans plusieurs tronçons sollicités et rigidité variable des poutres. Equations universelles

Si une poutre subit l'action d'une charge composée (fig. VII.4), la loi de variation des moments fléchissants dans des tronçons différents s'exprime par des équations différentes. L'équation différentielle de l'axe fléchi doit être établie pour chaque tronçon.

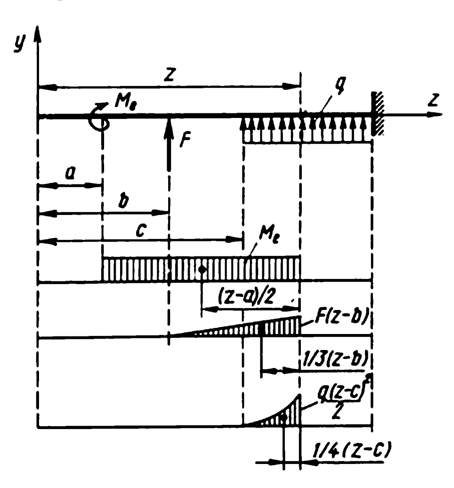


Fig. VII.4

Le nombre de constantes d'intégration est égal au double du nombre de tronçons. Pour calculer ces constantes, on peut toujours composer un nombre suffisant d'équations, en utilisant les conditions aux appuis des poutres et les conditions aux extrémités des tronçons connexes, où les flèches et les angles de rotation sont égaux entre eux. Toutefois, ce mode de résolution est très compliqué.

Il devient plus simple si l'intégration indéfinie de l'équation [VII.5] est remplacée par l'intégration définie. On parvient ainsi à obtenir une interprétation grapho-analytique commode.

Considérons toujours l'équation différentielle [VII.5]. Intégrons-la encore une fois dans les limites de zéro à z en posant pour le moment EI = const :

$$EI\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = \int_0^z M dz = \int_{A'(0)}^{A'(z)} dA, \qquad \text{(VII.12)}$$

où $dA' = M\,dz$ est la différentielle de l'aire du diagramme de M (fig. VII.5).

Après l'intégration, on tire de (VII.12) :

$$EI\vartheta = EI\vartheta_0 + A'(z) - A'(0) = EI\vartheta_0 + A' - A'(0)$$

ou

$$EI\vartheta = EI\vartheta_0 + A'. \qquad \textbf{(VII.13)}$$

Ici $A'(z) = A'$ est la partie rejetée du diagramme de M, c'est-à-dire l'aire du diagramme entre l'origine des coordonnées et la section courante, où

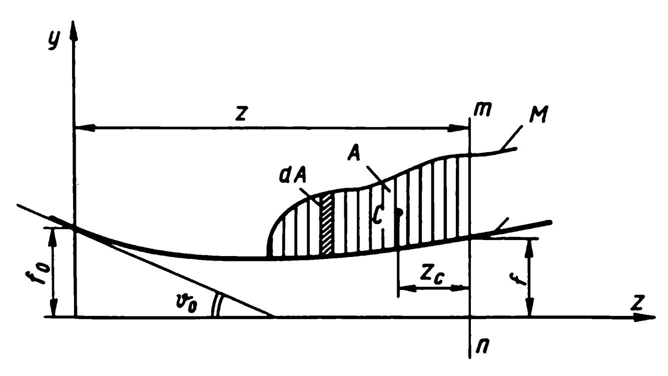


Fig. VII.5

l'on détermine les déplacements ; $A'(0)$, l'aire rejetée pour la section passant par l'origine des coordonnées, égale évidemment à zéro.

Ecrivons l'équation [VII.13] sous la forme

$$EI\frac{df}{dz} = EI\vartheta_0 + A'(z). \qquad \text{(VII.14)}$$

Intégrons-la de 0 à z :

$$EI\int_{f_0}^{f} df = EI\vartheta_0\int_0^z dz + \int_0^z A'(z)dz = EI\vartheta_0\int_0^z dz + \int_{S(0)}^{S(z)} dS. \qquad \text{(VII.15)}$$

Ici $dS = A'(z)dz$ est la différentielle du moment statique de l'aire rejetée du diagramme de M.

Après l'intégration, (VII.15) devient :

$$EIf = EIf_0 + EI\vartheta_0 z + S(z) - S(0) = EIf_0 + EI\vartheta_0 z + S'_{m,n}, \qquad \textbf{[VII.16]}$$

où $S(z) \equiv S'_{m,n} = A'z_s$ est le moment statique de l'aire rejetée du diagramme de M par rapport à la section courante ; $S(0)$, le moment statique de l'aire rejetée par rapport à la section qui passe par l'origine des coordonnées ; il est nul du fait que $A'(0) = 0$.

Ainsi, en flexion des moments angulaires et linéaires sont déterminés par les formules [VII.13] et [VII.16].

Si dans les différents tronçons de la poutre la rigidité est différente, au lieu des formules [VII.13] et [VII.16]

$$f' \equiv \vartheta = \vartheta_0 + A'_{\text{réd}}\,; \qquad \text{[VII.17]}$$

$$f = f_0 + \vartheta_0 z + S'_{\text{réd}}, \qquad \text{[VII.18]}$$

où $A'_{\text{réd}}$ est l'aire réduite rejetée du diagramme des moments, c'est-à-dire du diagramme dont les ordonnées sont divisées par EI ; $S'_{\text{réd}}$, le moment statique par rapport à la section envisagée de l'aire rejetée réduite du diagramme des moments.

Le tableau VII.1 donne les diagrammes les plus fréquents des moments fléchissants avec indication de leurs aires et des positions du centre de gravité (z_c).

Tableau VII.1

Forme du diagramme	Aire du diagramme	Distance jusqu'au centre de gravité
h; z_c; l	hl	$\frac{1}{2}l$
h; $2/3\,l$; l	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{2}{3}l$
Parabole; h; $3/4\,l$; l	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{3}{4}l$
Parabole; h; $5/8\,l$; l	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$

Voici la règle des signes pour l'utilisation des formules [VII.13] et [VII.16], ainsi que des [VII.17] et [VII.18] : l'aire A' est considérée positive si le diagramme de M est positif, et négative si le diagramme est négatif ; le moment statique $S'_{m,n}$ est considéré positif si A' est positive, et négatif si A' est négative.

Si la rigidité de la poutre est constante, les formules [VII.13] et [VII.16] peuvent se mettre sous une forme analytique. Faisons-le pour trois types des forces extérieures représentées sur la figure VII.4. Construisons les diagrammes des moments fléchissants pour chaque sollicitation.

D'après les formules [VII.13] et [VII.16], on obtient les formules suivantes en calculant les surfaces et les moments statiques (par rapport à la section courante) des aires rejetées des diagrammes :

$$EI\vartheta = EI\vartheta_0 + M_c(z - a) + F(z - b)^2/2 + q(z - c)^3/6 ; \quad \textbf{[VII.19]}$$

$$EIf = EIf_0 + EI\vartheta_0 z + M_c(z - a)^2/2 + F(z - b)^3/6 + q(z - c)^4/24. \quad \textbf{[VII.20]}$$

Dans le cas de l'action simultanée de plusieurs forces extérieures, les équations des angles de rotation et des flèches (d'après le principe de l'indépendance de l'effet des forces) s'écrivent

$$EIf' \equiv EI\vartheta = EI\vartheta_0 + \sum M_c(z - a) + \sum \frac{F(z - b)^2}{2} + \sum \frac{q(z - c)^3}{6} ; \quad \text{(VII.21)}$$

$$EIf = EIf_0 + EI\vartheta_0 z + \sum \frac{M_c(z - a)^2}{2} + \sum \frac{F(z - b)^3}{6} + \sum \frac{q(z - c)^4}{24}. \quad \text{(VII.22)}$$

Ces équations s'appellent *équations universelles de l'axe fléchi d'une poutre.* Dans ces formules figurent avec leurs signes toutes les forces exté-

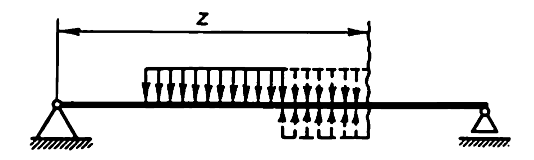


Fig. VII.6

rieures (y compris les réactions d'appui) appliquées entre l'origine des coordonnées et la section d'abscisse z pour laquelle on détermine les déplacements. Les forces extérieures représentées sur la figure VII.4 entrent dans

les équations universelles avec le signe plus, et les forces extérieures orientées dans le sens opposé, avec le signe moins.

Il importe de noter que le dernier terme de ces équations n'est justifié que dans le cas où la charge répartie n'est pas coupée avant la section où l'on détermine f ou ϑ. Mais si la charge est coupée, il convient de la prolonger jusqu'à la section donnée, tout en ajoutant une charge égale en valeur absolue mais de signe opposé (fig. VII.6).

L'inconvénient des équations universelles est qu'elles ne se prêtent pas à la détermination immédiate des déplacements dans les poutres dont les tronçons différents ont une rigidité EI différente.

Il faut alors employer la méthode de Mohr (cf. dans ce qui suit), qui est la méthode générale de la détermination des déplacements, ou recourir aux formules [VII.17] et [VII.18].

§ 60. Exemples de détermination des déplacements en flexion par la méthode grapho-analytique et d'après les équations universelles

Exemple VII.2. Déterminer la flèche de l'extrémité libre de la console sollicitée par une charge concentrée à l'extrémité (fig. VII.7, *a*).

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées au droit de l'encastrement ; alors, $f_0 = 0$ et $\vartheta_0 = 0$. Construisons le diagramme des moments fléchissants. Le centre de gravité du dia-

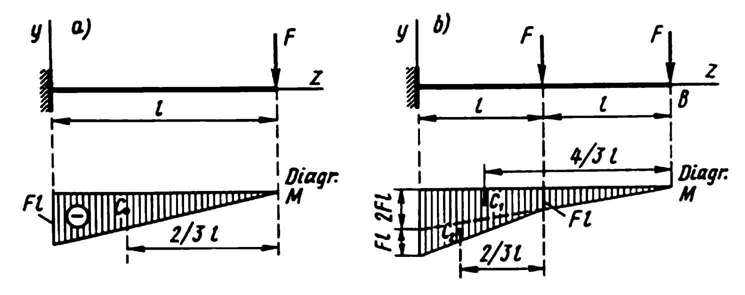


Fig. VII.7

gramme se trouve à $2l/3$ de l'extrémité droite. Déterminons, d'après la formule [VII.13], $EI\vartheta_B$ comme l'aire du diagramme de M entre l'origine des coordonnées et la section B :

$$EI\vartheta_B = A' = -Fl \cdot l/2 = -Fl^2/2.$$

On retient le signe moins du fait que le diagramme est négatif ; d'où

$$\vartheta_B = -Fl^2/(2EI) \text{ (dans le sens horaire).}$$

Calculons la formule [VII.16] pour la flèche en tant que moment statique de toute l'aire du diagramme par rapport à la section B :

$$EIf_B = S_B' = -\ 1/2\, Fl \cdot l \cdot 2/3\, l = -Fl^3/3,$$

d'où $f_B = -Fl^3/(3EI)$ (dans le sens négatif de l'axe y, c'est-à-dire en bas). Pour le calcul de S'_B, on prend le signe moins parce que le diagramme de M est négatif.

Exemple VII.3. Déterminer la flèche de l'extrémité libre de la console représentée sur la figure VII.7, *b*.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées au droit de l'encastrement ; alors, $f_0 = 0$; $\vartheta_0 = 0$. «Stratifions» le diagramme des moments fléchissants, c'est-à-dire représentons-le comme la somme des diagrammes de l'action de chaque force (deux triangles).

Calculons l'angle de rotation d'après la formule [VII.13] :

$$EI\vartheta_B = A' = -0{,}5 \cdot 2Fl \cdot 2l - 0{,}5Fl \cdot l = -2{,}5Fl^2 \text{ (dans le sens horaire).}$$

D'après la formule [VII.16] établissons la flèche

$$EIf_B = S'_B = -0{,}5 \cdot 2Fl \cdot 2l \cdot 4l/3 - 0{,}5Fl \cdot l \cdot 5l/3 = -3{,}5Fl^3 \text{ (en bas).}$$

L'aire et le moment statique du diagramme des moments sont pris avec le signe moins parce que le diagramme de M est négatif.

Exemple VII.4. Déterminons la flèche sous charge pour la poutre représentée sur la figure VII.8.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche ; alors, $f_0 = 0$. Dressons le diagramme de M.

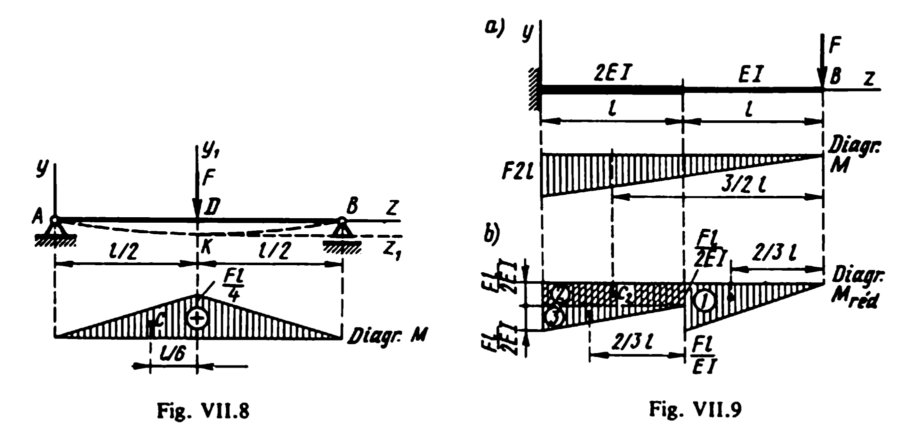


Fig. VII.8

Fig. VII.9

Pour calculer ϑ_0, faisons appel à la condition $\vartheta_{z=l/2} = 0$ (en vertu de la symétrie de l'axe fléchi de la poutre). [VII.13] entraîne

$$EI\vartheta_{z=l/2} = EI\vartheta_0 + A' = EI\vartheta_0 + \frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Fl}{4} = 0,$$

d'où $EI\vartheta_0 = -Fl^2/16$ (dans le sens horaire).

L'aire A' est affectée du signe plus du fait que le diagramme de M est positif.

D'après [VII.16], on a

$$EIf_D = -\frac{Fl^2}{16}\frac{l}{2} + S'_D = -\frac{Fl^3}{32} + \frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Fl}{4}\frac{l}{6} = -\frac{Fl^3}{48} \quad \text{(en bas).} \qquad \text{(VII.23)}$$

Pour calculer S'_D on retient le signe plus parce que le diagramme de M est positif.

Cet exemple peut être résolu d'une façon bien plus simple si l'on place l'origine des coordonnées au point K. Alors, $f_0 = \vartheta_0 = 0$. Le déplacement du point B par rapport au point K

se trouve en appliquant [VII.16] :

$$EIf_B = S'_B = \frac{1}{2}\frac{Fl}{4}\frac{l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{48} \quad \text{(en haut).}$$

Par conséquent, $f_D = -f_B = -Fl^3/(48EI)$ (en bas).

Exemple VII.5. Déterminer la flèche de l'extrémité libre de la poutre représentée sur la figure VII.9, *a*.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées au droit de l'encastrement ; alors, $f_0 = 0$ et $\vartheta_0 = 0$. Construisons le diagramme de M et le diagramme réduit de $M_{\text{réd}}$, où les ordonnées de M sont divisées par la rigidité de la poutre (fig. VII.9, *b*). La formule [VII.17] conduit à

$$\vartheta_B = \sum A'_{\text{réd}} = -\frac{l}{2}\left(\frac{Fl}{EI} + \frac{Fl}{2EI}\right) - \frac{1}{2}l\frac{Fl}{EI} =$$

$$= -\frac{5}{4}\frac{Fl^2}{EI} \quad \text{(dans le sens horaire).}$$

En divisant le diagramme en trois figures simples *1, 2, 3*, on obtient à l'aide de [VII.18]

$$f_B = \sum S'_{\text{réd}} = -\frac{1}{2}\frac{Fl}{EI}l\frac{2}{3}l - \frac{Fl}{2EI}l\frac{3}{2}l -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{Fl}{2EI}l\frac{5}{3}l = -1{,}5Fl^3/EI \text{ (en bas).}$$

Exemple VII.6. Calculer la flèche de la section au milieu de la poutre représentée sur la figure VII.10, *a*.

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre ; alors $f_0 = 0$. Construisons le diagramme de M et le diagramme de $M_{\text{réd}}$, où les ordonnées de M sont divisées par la rigidité de la poutre (fig. VII.10, *b*).

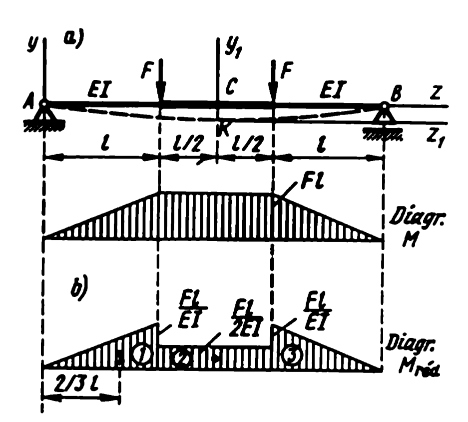


Fig. VII.10

Pour déterminer ϑ_0 recourons à la condition $f_{z=1,5l} = 0$ (en vertu de la symétrie du problème).

La formule (VII.17) amène $f'_C = \vartheta_0 + A'_{\text{réd}} = 0$ ou

$$\vartheta_0 + \frac{l}{2}\frac{Fl}{EI} + \frac{Fl}{2EI}\frac{l}{2} = 0,$$

d'où $\vartheta_0 = -\frac{3}{4}\frac{Fl^2}{EI}$ (dans le sens horaire). Calculons la flèche avec $z = 1{,}5l$ d'après la formule [VII.18] :

$$f_C = \vartheta_0 z + \sum S'_{\text{réd}} = -\frac{3}{4}\frac{Fl^2}{EI}\frac{3}{2}l + \frac{l}{2}\frac{Fl}{EI}\frac{5}{6}l + \frac{Fl}{2EI}\frac{l}{2}\frac{l}{4} = -\frac{31}{48}\frac{Fl^3}{EI} \text{ (en bas).}$$

Cet exemple peut se résoudre d'une façon bien plus simple, en utilisant la symétrie et en plaçant l'origine des coordonnées en K. Alors, la formule [VII.18] donne le déplacement du point B par rapport au point K (pour $f_0 = \vartheta_0 = 0$)

$$f_B = S'_{\text{réd}} = \frac{l}{2}\frac{Fl}{EI}\frac{2}{3}l + \frac{l}{2}\frac{Fl}{2EI}\frac{5}{4}l = \frac{31Fl^3}{48EI} \text{ (en haut).}$$

Donc, $f_K = -f_B = -31Fl^3/(48EI)$ (en bas).

Exemple VII.7. Déterminer d'après les équations universelles la flèche et l'angle de rotation maximaux de la console sollicitée par une charge uniformément répartie (fig. VII.11).

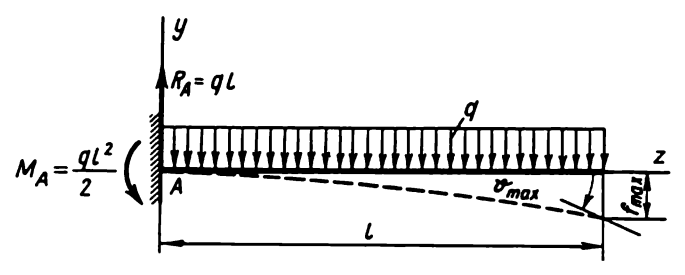


Fig. VII.11

Solution. Le plus avantageux est de placer l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre, du fait qu'alors $f_0 = 0$; $\vartheta_0 = 0$.

Par conséquent, les équations universelles (VII.21) et (VII.22) permettent de calculer d'emblée $f_{\max}$ et $\vartheta_{\max}$ qui, comme le montre le dessin, ont lieu dans la section $z = l$.

Pour utiliser les équations universelles, il faut, comme il l'a été déjà dit, prendre les forces et les moments appliqués entre la section donnée et l'origine des coordonnées. A cet effet, calculons au préalable le couple de réaction et la force de réaction au droit de l'encastrement.

La force de réaction $R_A = ql$ est dirigée en haut. Dans les équations universelles elle figure avec le signe plus. Le couple de réaction $M_A = ql^2/2$ est dirigé dans le sens antihoraire. Il faut le prendre avec le signe moins.

La distance entre l'origine des coordonnées et le couple, la réaction d'appui et l'origine de la charge uniformément répartie est nulle : $a = b = c = 0$.

Calculons f pour $z = l$, c'est-à-dire $f_{\max}$:

$$EIf_{\max} = -\frac{ql^2}{2}\frac{(l-0)^2}{2} + \frac{ql(l-0)^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} = -\frac{ql^4}{8}.$$

Donc,

$$f_{\max} = ql^4\,(8EI) \text{ (en bas).} \qquad \text{(VII.24)}$$

L'équation universelle des angles entraîne

$$EIf'_{\max} = -\frac{ql^2}{2}(l-0) + \frac{ql(l-0)^2}{2} - \frac{q(l-0)^3}{6} = -\frac{ql^3}{6}.$$

Ainsi,
$$f'_{max} = \vartheta_{max} = -ql^3/(6EI) \text{ (dans le sens horaire).} \quad \text{(VII.25)}$$

Exemple VII.8. Calculer f_{max} et f'_{max} d'une console sollicitée par le couple M_e appliqué à l'extrémité libre (fig. VII.12).

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre. Alors, $f_0 = 0$; $\vartheta_0 = 0$. Les réactions d'appui sont $R_A = 0$, alors que $M_A = M$ et il est dirigé dans le sens antihoraire.

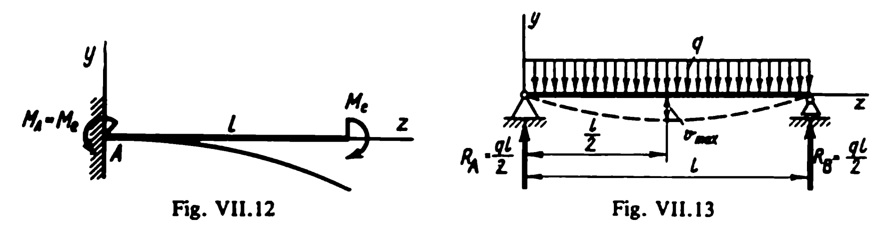


Fig. VII.12 Fig. VII.13

Les valeurs de f_{max} et f'_{max} sont enregistrées à l'extrémité droite de la poutre pour $z = l$. En appliquant les équations universelles, il vient

$$EIf_{max} = -M_e(l - 0)^2/2 = -M_e l^2/2, \; f_{max} = -M_e l^2/(2EI) \text{ (en bas) ;} \quad \text{(VII.26)}$$

$$EIf'_{max} = -M_e(l - 0) = -M_e l \; ; \; f'_{max} = -M_e l/(EI) \text{ (dans le sens horaire).} \quad \text{(VII.27)}$$

Exemple VII.9. Déterminer f_{max} et ϑ_{max} pour la poutre représentée sur la figure VII.13.

Solution. En vertu de la symétrie, les réactions sont

$$R_A = R_B = ql/2.$$

Plaçons l'origine des coordonnées au droit de l'appui gauche. Alors, $f_0 = 0$. Pour calculer ϑ_0, utilisons la condition que pour $z = l$, $f = 0$. On a alors

$$EIf_{z=l} = EI\vartheta_0 l + \frac{ql}{2}\frac{(l-0)^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} = 0,$$

d'où $\vartheta_0 = -ql^3/(24EI) = \vartheta_A$. Il est clair que $\vartheta_A = \vartheta_B$.

Notons que les angles de rotation maximaux sont enregistrés aux sections d'appui.

La flèche maximale a lieu au milieu de la travée :

$$EIf_{z=l/2} = -\frac{ql^3}{24}\frac{l}{2} + \frac{\frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2}-0\right)^3}{6} - \frac{q\left(\frac{l}{2}-0\right)^4}{24} = -\frac{5ql^4}{384}.$$

Donc,
$$f_{max} = -5ql^4/(384EI) \text{ (en bas).} \quad \text{(VII.28)}$$

Exemple VII.10. Calculer la flèche maximale et l'angle de rotation aux appuis pour une poutre sollicitée au milieu de la travée par une force concentrée (fig. VII.14).

Solution. Les réactions sont égales à $F/2$ chacune et sont dirigées de bas en haut.

Plaçons l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche, alors $f_0 = 0$. Pour calculer ϑ_0, appliquons la condition qu'avec $z = l$ la flèche de la poutre est nulle ($f = 0$) * :

$$EIf_{z=l} = EI\vartheta_0 l + \frac{F}{2}\frac{(l-0)^3}{6} - \frac{F(l-l/2)^3}{6} = 0,$$

---

* Dans ce cas-là ϑ_0 peut également se calculer d'après la condition qu'au milieu de la travée la tangente à la ligne élastique est horizontale, c'est-à-dire $f'_{z=l/2} = 0$.

d'où $EI\vartheta_0 = -Fl^2/16$. Par conséquent, $\vartheta_0 = \vartheta_A = \vartheta_{max} = -Fl^2/(16EI)$. En vertu de la symétrie, l'angle de rotation sur l'appui droit $\vartheta_B = -\vartheta_A = Fl^2/(16EI)$.

La flèche maximale $f_{max} = f_{z=l/2}$; donc,

$$EIf_{max} = -\frac{Fl^2}{2}\frac{l}{2} + \frac{F}{2}\frac{(l/2)^3}{6} = -\frac{Fl^3}{48}.$$

Finalement,

$$f_{max} = -Fl^3/(48EI) \text{ (en bas).} \qquad \text{(VII.29)}$$

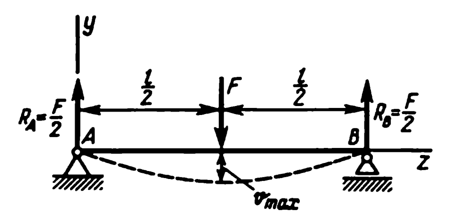


Fig. VII.14

Exemple VII.11. Déterminer les flèches aux points D et C et l'angle de rotation au point B de la poutre représentée sur la figure VII.15. Le moment d'inertie de la section de la poutre $I = 13\,380\text{ cm}^4 = 13\,380\cdot 10^{-8}\text{ m}^4$ (poutre en H n° 36) ; $E = 2\cdot 10^5$ MPa.

Solution. Calculons les réactions d'appui :

1. $\sum M_B = 0$; $R_A\cdot 4 + 40\cdot 3 - 80 - 40\cdot 1 - 40\cdot 2 = 0$, $R_A = 20$ kN.

2. $\sum Y = 0$; $-20 - 40 + R_B - 40 - 40 = 0$, $R_B = 140$ kN.

Plaçons l'origine des coordonnées au droit de l'appui gauche. Alors, $f_0 = 0$. L'angle ϑ_0 se calcule suivant la condition qu'avec $z = 4$ m, $f = 0$.

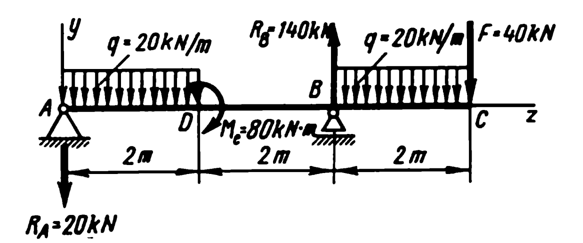


Fig. VII.15

L'équation universelle amène qu'avec $z = 4$ m, on a pour les flèches

$$EIf_{z=4} = EI\vartheta_0\cdot 4 + \frac{80\,(4-2)^2}{2} - \frac{20\,(4-0)^3}{6} - \frac{20\,(4-0)^4}{24} + \frac{20\,(4-2)^4}{24} = 0.$$

La charge répartie cessant d'agir au point D, d'après ce qui a été dit, prolongeons-la jusqu'à l'extrémité, tout en introduisant dans le tronçon DB une charge compensatrice dirigée dans le sens opposé. Le dernier terme tient précisément compte de la charge répartie qui agit de bas en haut (sur la figure ces transformations de la charge ne sont pas indiquées).

Après les calculs, on obtient $\vartheta_0 = \vartheta_A = 63{,}3/(EI)$. Calculons les flèches au point C ($z = 6$ m) :

$$EIf_C = 63{,}3\cdot 6 + \frac{80\,(6-2)^2}{2} - \frac{20\,(6-0)^3}{6} +$$

$$+ \frac{140\,(6-4)^3}{6} - \frac{20\,(6-0)^4}{24} + \frac{20\,(6-2)^4}{24} - \frac{20\,(6-4)^4}{24} =$$

$$= -393\ \text{kN}\cdot\text{m}^3 = -0{,}393\ \text{MN}\cdot\text{m}^3\ ;$$

au point D

$$EIf_D = 63{,}3\cdot 2 - \frac{20\,(2-0)^3}{6} - \frac{20\,(2-0)^4}{24} = 86{,}7\ \text{kN}\cdot\text{m}^3 = 0{,}086\ \text{MN}\cdot\text{m}^3.$$

On obtient finalement

$$f_C = \frac{-0{,}393}{EI} = \frac{-0{,}393}{2\cdot 10^5\cdot 13\,380\cdot 10^{-8}} = -0{,}0148\ \text{m} = -1{,}48\ \text{cm}\ ;$$

$$f_D = \frac{0{,}0867}{EI} = \frac{0{,}0867}{2\cdot 10^5\cdot 13\,380\cdot 10^{-8}} = 0{,}00324\ \text{m} = 0{,}324\ \text{cm}.$$

Déterminons l'angle de rotation au point B. D'après l'équation universelle, avec $z = 4$ m on a pour les angles de rotation

$$EIf'_B = 63{,}3 + 80\,(4-2) - \frac{20\cdot 4^2}{2} - \frac{20\cdot 4^3}{6} +$$

$$+ \frac{20\,(4-2)^3}{6} = -123\ \text{kN}\cdot\text{m}^3 = -0{,}123\ \text{MN}\cdot\text{m}^3,$$

d'où $\vartheta_B = \dfrac{-0{,}123}{EI} = \dfrac{-0{,}123}{2\cdot 10^5\cdot 13\,380\cdot 10^{-8}} = -46\cdot 10^{-4}$ rd.

§ 61. Théorème de réciprocité des travaux. Théorème de réciprocité des déplacements

Démontrons le théorème d'un grand intérêt pour les applications appelé théorème de réciprocité des travaux ou *théorème de Betti,* savant italien qui a été le premier à l'énoncer. A cet effet, considérons un système linéairement déformable en deux états différents qui correspondent à deux charges différentes (fig. VII.16). Pour simplifier les calculs, considérons une poutre simple soumise en deux états à la charge la plus simple (à une force concentrée). La charge, les efforts intérieurs et les déformations relatifs à ces deux états sont affectés d'indices 1 et 2.

La figure VII.16, *a* visualise le premier état du système, et la figure VII.16, *b,* le deuxième.

Le déplacement dans le sens de la charge en premier état produit par cette même charge est noté Δ_{11}. Le déplacement dans le sens de la charge en

deuxième état produit par l'action de la charge du premier état est noté Δ_{21}. Les notations du déplacement en deuxième état sont données par la figure VII.16, *b*. Les déplacements dont les notations comportent deux mêmes indices, par exemple, Δ_{11}, Δ_{22}, sont dits *principaux*, et ceux de la forme Δ_{12}, Δ_{21}, etc., *accessoires*. Démontrons maintenant le théorème de réciprocité des travaux et notamment : ***le travail des forces extérieures du premier état dans les déplacements du deuxième état est égal au travail des forces du deuxième état absorbé par les déplacements provoqués par les forces du premier état.***

Pour démontrer le théorème, appliquons à la poutre les forces F_1 et F_2, l'ordre de leur application étant différent.

1. Appliquons d'abord la charge F_1, puis faisons subir à la poutre déformée la force F_2 (fig. VII.17, *a*).

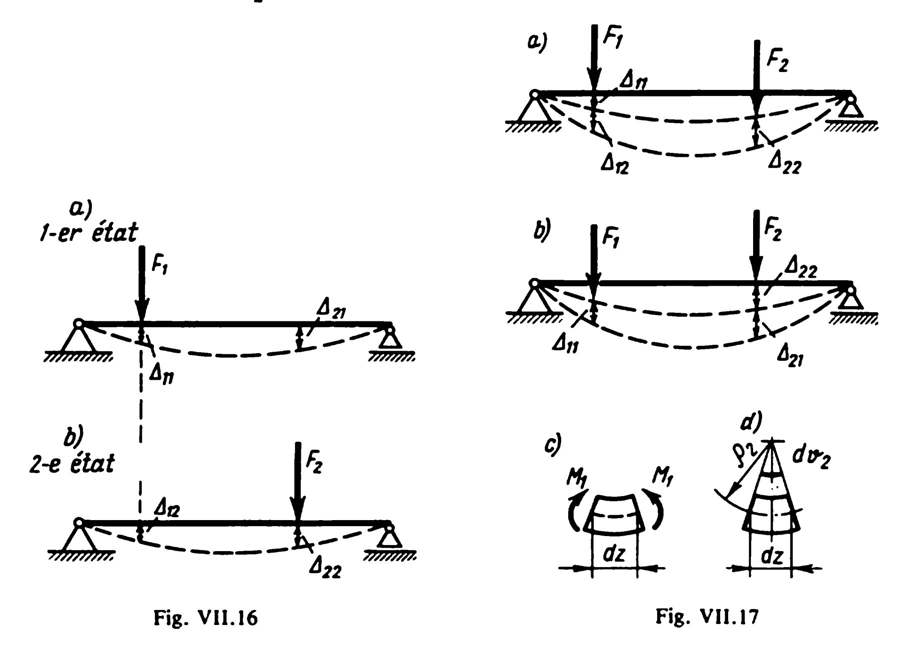


Fig. VII.16

Fig. VII.17

Calculons le travail effectué dans ces conditions par les forces extérieures.

Le travail de la force F_1 sur son déplacement Δ_{11} produit par cette même force est $W_{11} = F_1\Delta_{11}/2$ (cf. formule [II.44]). Le travail effectué par la force F_2 sur son propre déplacement Δ_{22} est $W_{22} = F_2\Delta_{22}/2$.

Le travail auxiliaire de la force F_1 sur le déplacement Δ_{12} dû à la force F_2 est $W_{12} = F_1\Delta_{12}$.

Portons notre attention sur le fait que dans le calcul de W_{12} le facteur 1/2 disparaît, du fait que la force F_1 sur le déplacement Δ_{12} effectue un travail tout en restant constante.

Le travail total réalisé par les forces extérieures suivant le premier mode (succession) de sollicitation

$$W_I = W_{11} + W_{22} + W_{12}.$$

Le travail W_{12} réel de la force sur les déplacements produits par une autre force est dit *complémentaire*. Pourtant, il se peut que ce travail ne se réalise pas et n'est envisagé que comme une éventualité, c'est-à-dire tel qu'il aurait lieu si l'on applique au système les deux charges simultanément. Un tel travail est dit *virtuel* (*possible*).

Dans les calculs qui suivent nous ne ferons pas de différence entre le travail complémentaire et le travail virtuel.

2. Chargeons maintenant la poutre dans une autre succession : appliquons d'abord la force F_2, puis la force F_1 (fig. VII.17, *b*). Le travail effectué par la force F_2 sur son propre déplacement Δ_{22}

$$W_{22} = F_2\Delta_{22}/2.$$

Le travail de la force F_1 sur son propre déplacement Δ_{11}

$$W_{11} = F_1\Delta_{11}/2.$$

Le travail de la force F_2 sur le déplacement Δ_{21}

$$W_{21} = F_2\Delta_{21}.$$

Le travail total en deuxième mode de sollicitation

$$W_{II} = W_{22} + W_{11} + W_{21}.$$

Toutefois, le travail des forces ne dépend pas de l'ordre de leur application. Par conséquent, $W_I = W_{II}$, d'où

$$W_{12} = W_{21} \qquad \text{(VII.30)}$$

ou, pour le cas envisagé,

$$F_1\Delta_{12} = F_2\Delta_{21}. \qquad \text{(VII.31)}$$

Ceci démontre le théorème de la réciprocité des travaux virtuels des forces extérieures. Nous l'avons démontré sur l'exemple des charges extérieures concentrées. Or, ce théorème est également justifié pour toute charge extérieure qu'elle soit concentrée ou répartie, ou encore due aux moments extérieurs. Il convient seulement de retenir que le travail des moments se calcule non pas sur les déplacements linéaires, mais sur les déplacements angulaires.

D'une façon analogue, on peut démontrer la réciprocité du travail virtuel des forces intérieures

$$W^i_{12} = W^i_{21}. \qquad \text{(VII.32)}$$

Le travail virtuel, par exemple W^i_{12} d'un élément de poutre de longueur dz vaut en valeur absolue (fig. VII.17, *c, d*)

$$dW^i_{12} = M_1 d\vartheta_2. \qquad \text{(VII.33)}$$

D'après le dessin,

$$d\vartheta_2 = dz/\rho_2.$$

Mais $1/\rho_2 = M_2/(EI)$ [cf. formule (VI.7)]. Donc, $d\vartheta = M_2 dz/(EI)$; par conséquent,

$$dW^i_{12} = M_1 M_2 dz/(EI).$$

Le travail virtuel W^i_{12} pour toute la poutre de longueur l

$$W^i_{12} = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dz, \qquad \text{(VII.34)}$$

où M_1 et M_2 sont les valeurs courantes des moments fléchissants en premier et en deuxième états.

Portons notre attention sur le fait que dans cette formule, tout comme dans celle du travail virtuel des forces extérieures, le facteur 1/2 ne figure pas.

D'une façon analogue, on peut montrer que le travail des forces intérieures en deuxième état sur les déplacements produits par les forces intérieures du premier état peut se calculer d'après la formule :

$$W^i_{21} = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dz. \qquad \text{(VII.35)}$$

En comparant les expressions (VII.34) et (VII.35), on voit qu'en effet $W^i_{12} = W^i_{21}$, puisque

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dz = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dz.$$

Ceci démontre la réciprocité du travail virtuel des forces intérieures.

En utilisant la loi de la conservation de l'énergie, on peut montrer que le travail supplémentaire des forces extérieures est égal en valeur absolue au travail supplémentaire des forces intérieures : $W_{12} = W^i_{12}$. En effet, lorsque le système est soumis à la force F_1, les forces extérieures effectuent le travail $W_{11} = F_1 \Delta_{11}/2$, et les forces intérieures, le travail (cf. § 57)

$$W^i_{11} = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_1^2 dz}{EI}.$$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, on a

$$\frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_1^2 dz}{EI}.$$

Pour la sollicitation ultérieure du système par la force F_2, on a, d'une façon analogue, l'égalité

$$\frac{1}{2} F_2\Delta_{22} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_2^2 dz}{EI}.$$

D'autre part, lorsque le système subit la force F_2, le travail complémentaire réalisé par la force F_1 est

$$W_{12} = F_1\Delta_{12},$$

et par les forces intérieures,

$$W^i_{12} = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dz,$$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, le travail W_{12} doit être égal au travail W^i_{12} :

$$W_{12} = W^i_{12} \text{ ; d'une façon analogue, } W_{21} = W^i_{21}. \qquad \text{[VII.36]}$$

Ce qui vient d'être dit implique également

$$W_{12} = W_{21} = W^i_{12} = W^i_{21}. \qquad \text{[VII.37]}$$

Ces relations sont utilisées par la suite pour justifier la méthode générale de la détermination des déplacements (méthode de Mohr).

Le théorème de la réciprocité des travaux conduit en tant qu'un cas particulier à un autre théorème important, celui *de la réciprocité des déplacements* (théorème de Maxwell).

En adoptant $F_1 = F_2 = 1$, on obtient d'après la formule (VII.31) à partir du théorème de Betti

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \qquad \text{[VII.38]}$$

Ici les déplacements produits par les forces égales à l'unité (forces unitaires) sont notés δ_{11}, δ_{12}, etc., au lieu de Δ_{11}, Δ_{12}, etc., adoptés pour la notation des déplacements produits par des forces quelconques.

Le déplacement du point d'application d'une force unitaire dans le sens de sa direction, provoqué par une deuxième force unitaire, est égal au déplacement du point d'application de la deuxième force unitaire dans le sens de la direction de celle-ci, résultant de l'action de la première force unitaire.

§ 62. Détermination des déplacements par la méthode de Mohr. Règle de Vérechtchaguine

Examinons maintenant la méthode générale de détermination des déplacements pour tout système déformé linéairement sous une charge

quelconque. Cette méthode est proposée par le savant allemand éminent O. Mohr.

Supposons, par exemple, qu'il soit nécessaire de calculer le déplacement vertical du point B de la poutre représentée sur la figure VII.18, *a*. Notons par f l'état (sollicitation) donné. Choisissons un état auxiliaire de la même poutre à force unitaire (adimensionnelle) appliquée au point B dans la direction du déplacement cherché. Désignons par k l'état auxiliaire (fig. VII.18, *b*).

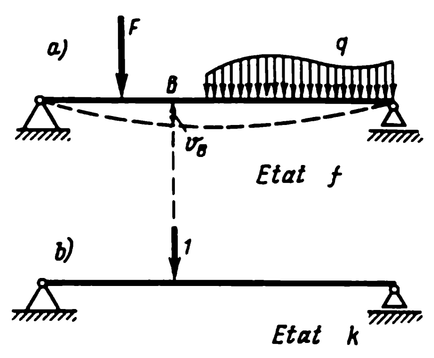


Fig. VII.18

Calculons le travail des forces extérieures et intérieures de l'état auxiliaire sur les déplacements résultant de l'action des forces de l'état de sollicitation.

Le travail des forces extérieures est égal au produit de la force unitaire par le déplacement cherché v_B :

$$W_{kf} = 1 \cdot v_B,$$

et le travail des forces intérieures, à l'intégrale

$$W^i_{kf} = W^i_{fk} = \int_0^l \frac{M_k M_f \mathrm{d}z}{EI}.$$

Mais, en vertu de l'égalité [VII.37], on a $W_{kf} = W^i_{kf}$ ou

$$v_B = \int_0^l \frac{M_k M_f \mathrm{d}z}{EI}. \qquad \text{[VII.39]}$$

C'est ce qu'on appelle l'*intégrale de Mohr* qui permet de calculer le déplacement en un point quelconque d'un système déformé linéairement. Dans cette formule sous le signe d'intégration le produit $M_k M_f$ est positif si les deux moments fléchissants sont de même signe, et négatif si M_k et M_f ont des signes différents.

Si le déplacement angulaire était déterminé pour le point B, il faudrait en état k appliquer au point B un moment égal à l'unité (adimensionnel).

Si tout déplacement (angulaire ou linéaire) est noté Δ, l'intégrale de Mohr s'écrit :

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_k M_f \mathrm{d}z}{EI}. \qquad \text{(VII.40)}$$

Dans le cas général, l'expression analytique de M_k et M_f peut différer suivant les tronçons différents de la poutre ou, en général, d'un système élastique. C'est pourquoi, au lieu de (VII.40), on peut utiliser une formule plus générale

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_k M_f \mathrm{d}z}{EI}. \qquad \text{(VII.41)}$$

Si les barres du système travaillent à la flexion et à la traction, au lieu de (VII.41), il faut utiliser la formule

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_k M_f \mathrm{d}z}{EI} + \sum \int_0^l \frac{N_k N_f \mathrm{d}z}{EA}. \qquad \text{(VII.42)}$$

Dans le cas particulier, où les barres travaillent seulement à la traction ou à la compression (treillis), la formule des déplacements devient

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_k N_f \mathrm{d}z}{EA}. \qquad \text{(VII.43)}$$

Dans cette formule, le produit $N_k N_f$ est positif si les deux efforts sont une traction ou une compression.

Ordinairement, comme le montrent les calculs comparatifs, le calcul des portiques dans lesquels les barres travaillent simultanément à la flexion et à la traction (compression), les déplacements peuvent être déterminés en ne tenant compte que des moments fléchissants, l'action des efforts normaux étant très faible.

Comme nous l'avons déjà dit (cf. § 57), dans les cas courants on peut ne pas prendre en compte l'action des efforts tranchants.

Si les états f et k sont analogues, au lieu des formules (VII.41), (VII.42) et (VII.43), on obtient

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M^2 \mathrm{d}z}{EI}; \qquad \text{(VII.44)}$$

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M^2 dz}{EI} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dz}{EA} ; \qquad \text{(VII.45)}$$

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N^2 dz}{EI} . \qquad \text{(VII.46)}$$

Le calcul immédiat de l'intégrale de Mohr (VII.40) peut être remplacé par le mode grapho-analytique ou la *méthode de multiplication des diagrammes,* ou encore la *règle de Vérechtchaguine.*

Considérons deux diagrammes des moments fléchissants, dont l'un, celui de M_f, est d'un contour arbitraire, alors que l'autre, celui de M_k, est rectiligne (fig. VII.19, *a, b*).

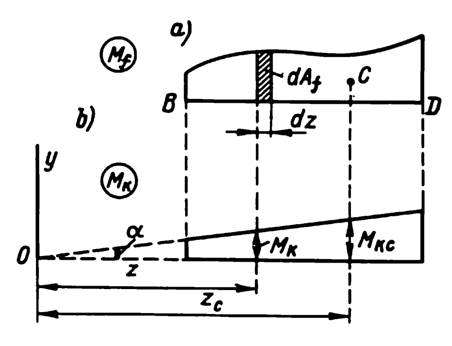


Fig. VII.19

Admettons que la section de la barre du tronçon *BD* soit constante. Dans ce cas,

$$\int_0^l \frac{M_k M_f dz}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_k M_f dz.$$

La grandeur $M_f dz$ est l'aire élémentaire dA_f du diagramme de M_f (hachurée sur la figure). Ainsi,

$$\int_B^D M_k M_f dz = \int_B^D M_k dA_f .$$

Mais $M_k = z \operatorname{tg} \alpha$; donc,

$$\int_B^D M_k dA_f = \operatorname{tg} \alpha \int_B^D z dA_f .$$

Or, $\int_B^D z\mathrm{d}A_f$ est le moment statique du diagramme de M_f par rapport à un certain axe y passant par le point O et égal à $A_f z_c$, où A_f est l'aire du diagramme des moments ; z_c, la distance entre l'axe y et le centre de gravité du diagramme de M_f.

Le dessin montre que $z_c = M_{kc}/\mathrm{tg}\,\alpha$, où M_{kc} est l'ordonnée du diagramme de M_k sous le centre de gravité du diagramme de M_f (sous le point C). Donc,

$$\int M_k \mathrm{d}A_f = \mathrm{tg}\,\alpha \int z\mathrm{d}A_f = \mathrm{tg}\,\alpha A_f z_c = A_f M_{kc}, \qquad \text{(VII.47)}$$

c'est-à-dire que l'*intégrale cherchée est égale au produit de l'aire du diagramme de M_f* (quel que soit le contour) *par l'ordonnée du diagramme rectangulaire de M_{kc} sous son centre de gravité.*

Finalement, pour déterminer les déplacements, on a la formule de Vérechtchaguine suivante

$$\Delta_{kf} = A_f M_{kc}/(EI). \qquad \textbf{[VII.48]}$$

On admet que la quantité $A_f M_{kc}$ est positive si les deux diagrammes reposent du même côté de la barre, et négative s'ils se trouvent des côtés différents. Le résultat positif de la mutiplication des diagrammes signifie que la direction du déplacement coïncide avec la direction de la force (ou du moment) unitaire.

Il faut retenir qu'il est de rigueur que le diagramme où est prise l'ordonnée M_{kc} doit être rectiligne. Dans le cas particulier, où les deux diagrammes sont rectilignes, l'aire de l'un quelconque d'entre eux peut être multipliée par l'ordonnée correspondante de l'autre.

Pour les barres de section variable, la règle de Vérechtchaguine de la multiplication des diagrammes est inapplicable du fait que EI ne peut déjà plus être sortie du signe d'intégration. Il faut alors exprimer la quantité EI comme fonction de l'abscisse de la section et calculer l'intégrale de Mohr [VII.39].

Lorsque la rigidité de la barre change par gradins, l'intégration (ou la multiplication des diagrammes) se fait pour chaque tronçon isolément (avec sa valeur de EI), puis les résultats sont sommés.

D'après la méthode de Vérechtchaguine, les déplacements peuvent être déterminés non seulement dans les barres à axe rectiligne, mais aussi lorsque leur axe est incurvé ou présente une ligne brisée.

Pour accélérer les calculs, on peut utiliser les tableaux tout prêts des produits des diagrammes (tableau VII.2).

Sur les cases de ce tableau à l'intersection des diagrammes élémentaires correspondants sont consignés les résultats de la multiplication des diagrammes.

En partitionnant un diagramme complexe en ses éléments représentés dans les tableaux VII.1 et VII.2, il ne faut pas oublier que les diagrammes paraboliques correspondent à l'action d'une seule charge répartie.

Dans le cas d'un diagramme complexe dont les tronçons curvilignes s'obtiennent sous l'action simultanée des moments concentrés, des forces et de la charge uniformément répartie, pour éviter toute erreur, il faut au préalable « stratifier » le diagramme complexe, c'est-à-dire le diviser en plusieurs diagrammes isolés dus à l'action des moments concentrés, des forces et de la charge uniformément répartie (cf. les exemples).

On peut également appliquer une autre méthode qui n'impose pas la « stratification » des diagrammes, mais qui prévoit seulement le dégagement de sa partie curviligne suivant la corde qui relie ses deux points extrêmes. Décrivons les deux procédés sur un exemple concret.

Supposons, par exemple, qu'il soit nécessaire de déterminer le déplacement vertical de l'extrémité gauche de la poutre (fig. VII.20).

Le diagramme global qui correspond à la charge est représenté sur la figure VII.20, *a*.

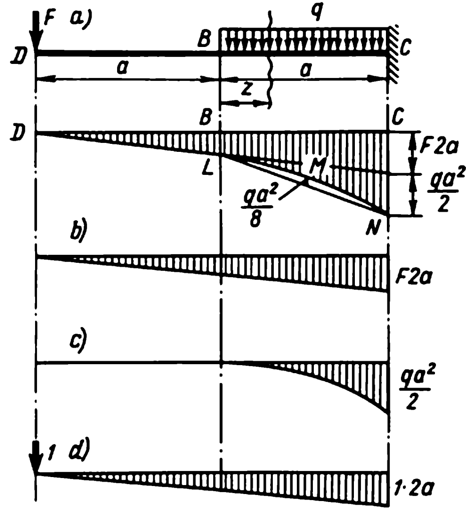


Fig. VII.20

Le diagramme dû à l'action d'une force unitaire appliquée en D est donné par la figure VII.20, *d*.

Pour déterminer le déplacement vertical au point D, il faut multiplier le diagramme de la charge par celui de la force unitaire. Or, on découvre que dans le tronçon BC du diagramme global le tronçon curviligne est dû non seulement à l'action d'une charge uniformément répartie, mais aussi à celle d'une force concentrée F. Il en résulte pour le tronçon BC non pas un diagramme élémentaire parabolique donné par les tableaux VII.1 et VII.2,

mais un diagramme complexe tel que les données de ces tableaux ne soient plus valables.

,·Il s'ensuit qu'il faut procéder à la « stratification » du diagramme complexe (fig. VII.20, *a*) en diagrammes élémentaires (fig. VII.20, *b*, *c*).

Le diagramme de la figure VII.20, *b* est établi seulement pour l'action de la force concentrée, et celui de la figure VII.20, *c*, pour l'action d'une charge uniformément répartie.

Maintenant en se guidant par les tableaux VII.1 ou VII.2, on peut obtenir le produit des diagrammes. A cet effet, il faut multiplier le diagramme triangulaire (fig. VII.20, *b*) par le diagramme triangulaire (fig. VII.20, *d*) et y ajouter le produit du diagramme parabolique (fig. VII.20, *c*) par le diagramme trapézoïdal du tronçon *BC* (fig. VII.20, *d*), du fait que, pour le tronçon *DB*, les ordonnées du diagramme sont nulles (fig. VII.20, *c*).

Décrivons maintenant la deuxième méthode de la multiplication des diagrammes. Examinons de nouveau la figure VII.20, *a*. Retenons pour l'origine de calcul la section *B*. Montrons que dans les limites de la courbe *LMN* les moments fléchissants peuvent s'obtenir en tant que somme algébrique des moments fléchissants, qui correspondent à la droite *LN*, et des moments fléchissants du diagramme parabolique *LNML*, le même que pour une simple poutre de longueur *a* sollicitée par une charge uniformément répartie *q* (cf. exemple VI.6) :

$$M_0 = qaz/2 - qz^2/2.$$

L'ordonnée maximale au milieu de la poutre vaut $qa^2/8$. Pour la démonstration, écrivons l'expression réelle du moment fléchissant dans la section à la distance z du point *B* :

$$M_z = -F(a + z) - qz^2/2 = -Fa - Fz - qz^2/2. \quad (1)$$

Ecrivons maintenant l'expression du moment fléchissant dans la même section, obtenue comme somme algébrique des ordonnées de la droite *LN* et de la parabole *LNML*.

L'équation de la droite *LN*

$$M_{ln} = -Fa - kz,$$

où k est la tangente de l'angle d'inclinaison de cette droite :

$$k = [-F \cdot 2a - qa^2/2 - (-Fa)]/a = -F - qa/2.$$

Par conséquent, l'équation des moments fléchissants est de la forme

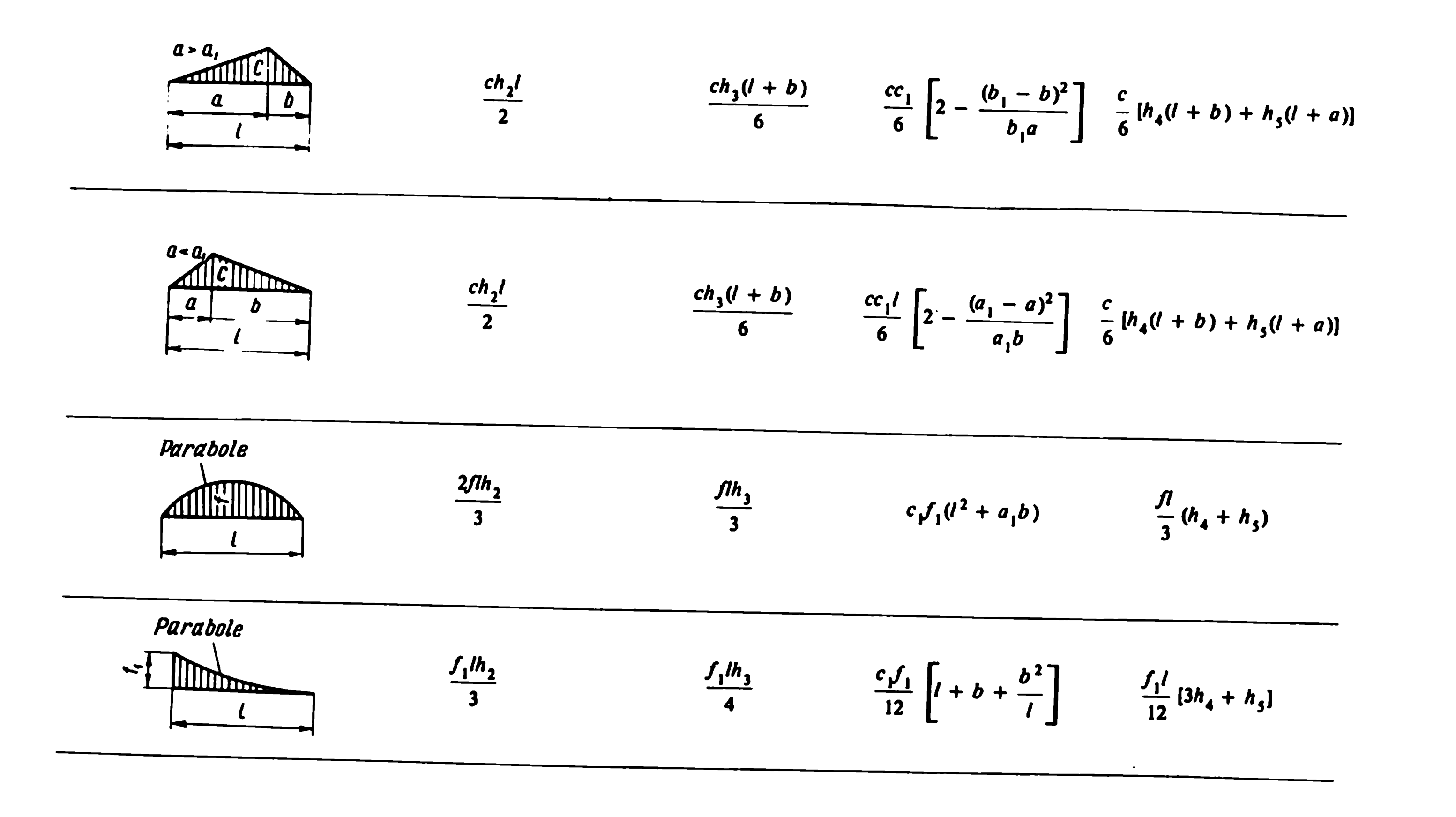
$$M_z = M_{ln} + M_0 = -Fa - \left(F + \frac{qa}{2}\right)z + \frac{qaz}{2} - \frac{qz^2}{2} =$$

$$= -Fa - Fz - \frac{qz^2}{2},$$

ce qui coïncide avec l'expression (1).

Tableau VII.2

M_f \ M_k	h_2; l	h_3; l	c_1; a_1; b; l	h_4; h_5; l
h; l	hh_2l	$\frac{hh_3l}{2}$	$\frac{c_1lh}{2}$	$\frac{h(h_4+h_5)l}{2}$
h; l	$\frac{hh_2l}{2}$	$\frac{hh_3l}{3}$	$\frac{h(l+b)c_1}{6}$	$\frac{hl}{6}(2h_4+h_5)$
h; l	$\frac{hh_2l}{2}$	$\frac{hh_3l}{6}$	$\frac{h(a_1+l)c_1}{6}$	$\frac{hl}{6}(h_4+2h_5)$
h; h_1; l	$\frac{h_2(h+h_1)l}{2}$	$\frac{h_3l}{6}(2h+h_1)$	$\frac{c_1h}{6}[h(l+b)+ h_1(l+a_1)]$	$\frac{1}{6}[h(2h_4+h_5)+ h_1(2h_5+h_4)]$



$a > a_1$; C; a; b; l	$\frac{ch_2 l}{2}$	$\frac{ch_3(l + b)}{6}$	$\frac{cc_1}{6}\left[2 - \frac{(b_1 - b)^2}{b_1 a}\right]$	$\frac{c}{6}[h_4(l + b) + h_5(l + a)]$
$a < a_1$; C; a; b; l	$\frac{ch_2 l}{2}$	$\frac{ch_3(l + b)}{6}$	$\frac{cc_1 l}{6}\left[2 - \frac{(a_1 - a)^2}{a_1 b}\right]$	$\frac{c}{6}[h_4(l + b) + h_5(l + a)]$
Parabole; f; l	$\frac{2flh_2}{3}$	$\frac{flh_3}{3}$	$c_1 f_1(l^2 + a_1 b)$	$\frac{fl}{3}(h_4 + h_5)$
Parabole; f_1; l	$\frac{f_1 lh_2}{3}$	$\frac{f_1 lh_3}{4}$	$\frac{c_1 f_1}{12}\left[l + b + \frac{b^2}{l}\right]$	$\frac{f_1 l}{12}[3h_4 + h_5]$

Dans la multiplication des diagrammes d'après la règle de Vérechtchaguine, il faut multiplier le trapèze *BLNC* par le trapèze du diagramme unitaire sur le tronçon *BC* (fig. VII.20, *d*) et retrancher le résultat de la multiplication du diagramme parabolique *LNML* $\left(\text{d'aire } A = \frac{2}{3} a \frac{qa^2}{8}\right)$ par le même trapèze du diagramme unitaire. Ce mode de « stratification » des diagrammes est particulièrement avantageux lorsque le tronçon curviligne du diagramme se trouve sur l'un des tronçons du milieu de la poutre.

Exemple VII.12. Calculer les déplacements vertical et angulaire de la console au droit de l'application de la charge (fig. VII.21).

Solution. Construisons le diagramme des moments fléchissants pour l'état sollicité (fig. VII.21, *a*).

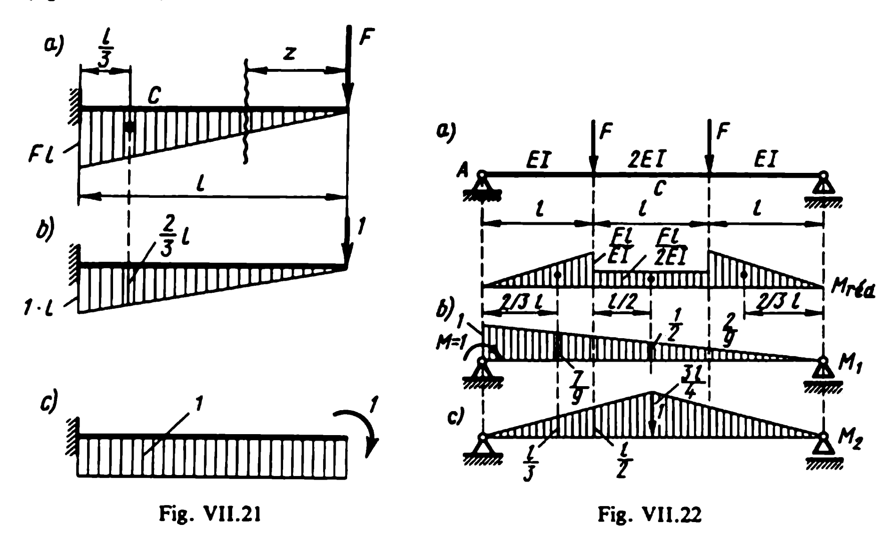


Fig. VII.21

Fig. VII.22

Pour déterminer le déplacement vertical, choisissons un état auxiliaire de la poutre soumise à une force unitaire au point d'application de la charge. Construisons le diagramme des moments fléchissants dus à cette force (fig. VII.21, *b*). Calculons le déplacement vertical par la méthode de Mohr :

$$v = \int_0^l \frac{M_k M_f \, dz}{EI}.$$

La valeur du moment fléchissant engendré par la charge $M_f = -Fz$ et par la force unitaire, $M_k = -1z$.

Portons ces valeurs de M_f et M_k sous le signe d'intégration et procédons au calcul

$$v = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Fz)(-z) dz = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Ce même résultat a été obtenu dans ce qui précède par une autre méthode.

La valeur positive de la flèche montre que le point d'application de la charge F se déplace en bas dans la direction de la force unitaire.

Si nous orientons la force unitaire de bas en haut, nous aurions $M_k = 1\,z$ et la flèche obtenue par intégration aurait le signe moins. Ce signe montrerait que le déplacement a lieu non pas en haut, mais en bas, ce qui correspond à la réalité.

Calculons maintenant l'intégrale de Mohr par multiplication des diagrammes d'après la règle de Vérechtchaguine. Les deux diagrammes étant rectilignes, il est indifférent lequel d'entre eux servira pour prendre l'aire et lequel, pour prendre l'ordonnée.

L'aire du diagramme de la charge $A_f = 0{,}5\,Fl^2$. Le centre de gravité de ce diagramme se situe à la distance de $l/3$ de l'encastrement.

Déterminons l'ordonnée du diagramme des moments dus à la force unitaire située sous le centre de gravité du diagramme de la charge. Vérifions sans peine qu'elle vaut $(2/3)l$. Donc,

$$v = \frac{1}{EI} A_f M_{kc} = \frac{1}{E}\frac{1}{2} Fl^2 \frac{2}{3} l = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Le même résultat s'obtient d'après le tableau des intégrales. Le produit des diagrammes est positif du fait que les deux diagrammes se situent en bas de la barre. Par conséquent, le point d'application de la charge se déplace en bas, c'est-à-dire dans la direction adoptée de la force unitaire.

Pour déterminer le déplacement angulaire (angle de rotation) choisissons l'état auxiliaire de la poutre lorsqu'à son extrémité est appliqué le moment concentré égal à l'unité.

Construisons pour ce cas le diagramme des moments fléchissants (fig. VII.21, *c*).

Déterminons le déplacement angulaire en multipliant les diagrammes. L'aire du diagramme de la charge $A_f = 0{,}5\,Fl^2$.

Les ordonnées du diagramme du moment unitaire valent partout l'unité. Donc, l'angle de rotation cherché de la section $\vartheta = Fl^2/(2EI)$.

Les deux diagrammes se situant en bas, le produit du diagramme est positif. De la sorte, la section à l'extrémité de la poutre tourne dans le sens horaire (dans la direction du moment unitaire).

Exemple VII.13. Déterminer d'après la méthode de Mohr-Vérechtchaguine l'angle de rotation sur l'appui gauche et la flèche au milieu de la poutre représentée sur la figure VII.22.

Solution. Construisons le diagramme réduit $M_{réd}$ de la charge (fig. VII.22, *a*). Pour déterminer l'angle ϑ_A, construisons le diagramme des moments fléchissants, relatif au moment unitaire sur l'appui gauche (fig. VII.22, *b*).

Pour déterminer ϑ, multiplions le diagramme de $M_{réd}$ par le diagramme de M_1 :

$$\vartheta_A = \frac{1}{2} l \frac{Fl}{EI}\frac{7}{9} + \frac{F}{2EI} l \frac{1}{2} + \frac{1}{2} l \frac{Fl}{EI}\frac{2}{9} = \frac{3}{4}\frac{Fl^2}{EI} \text{ (dans le sens horaire).}$$

Pour calculer la flèche au milieu de la poutre, appliquons à la section du milieu la force unitaire, construisons le diagramme des moments (fig. VII.22, *c*) et multiplions-le par le diagramme de $M_{réd}$. En vertu de la symétrie, la multiplication porte sur la moitié de la poutre et le résultat est doublé :

$$f_C = 2\left[\frac{1}{2} l \frac{Fl}{EI}\frac{l}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{3l}{4} + \frac{l}{2}\right)\frac{l}{2}\frac{Fl}{2EI}\right] = \frac{31}{48}\frac{Fl^3}{EI} \text{ (en bas).}$$

Les mêmes valeurs de ϑ_A et de f_C ont été obtenues dans l'exemple VII.6 par une autre méthode.

Exemple VII.14. Déterminer d'après le mode de Mohr-Vérechtchaguine la flèche au point D de la poutre visualisée par la figure VII.23. Le diagramme global des moments fléchissants est représenté sur la figure VI.14.

Solution. Etablissons le diagramme « stratifié » dû aux moments de la charge, c'est-à-dire construisons les diagrammes isolés de l'action de chaque charge. Pour la commodité de la multiplication des diagrammes, il est profitable de construire des diagrammes « stratifiés » (élémentaires) par rapport à la section, dont la flèche est déterminée, dans notre cas, par rapport à la section *D*.

La figure VII.23, *a* représente le diagramme des moments fléchissants dus à la réaction R_A (tronçon *AD*) et à la charge F = 40 kN (tronçon *DC*). Les diagrammes sont dressés sur des fibres comprimées.

La figure VII.23, *b* donne les diagrammes des couples de réaction R_B (tronçon *BD*) dus à la charge uniformément répartie gauche (tronçon *AD*) et à la charge uniformément répartie sur le tronçon *BC*. Ce diagramme est représenté sur la figure VII.23, *b* sur le tronçon *DC* en bas.

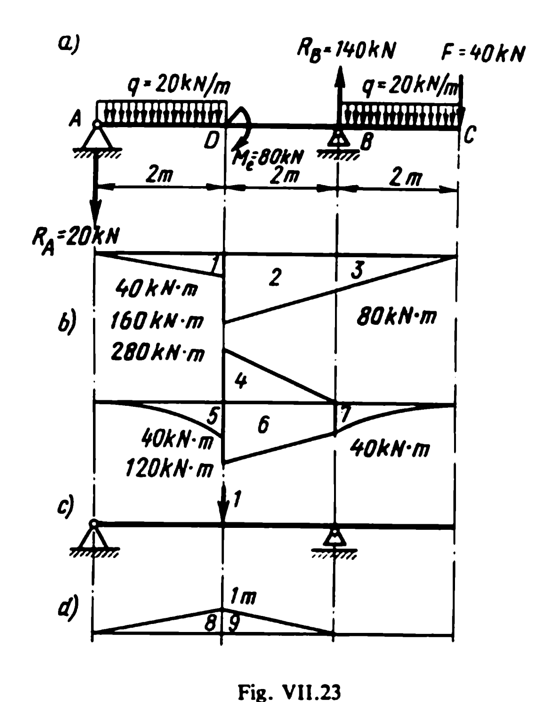


Fig. VII.23

Choisissons ensuite l'état auxiliaire de la poutre et, à cet effet, au point *D* où l'on détermine la flèche, appliquons la force unitaire (fig. VII.23, *c*). Le diagramme des moments produits par la force unitaire est fourni par la figure VII.23, *d*. Maintenant, multiplions les diagrammes de *1* à *7* par les diagrammes *8* et *9*, en utilisant les tableaux correspondants, compte tenu des signes. Alors, les produits des diagrammes situés d'un côté de la poutre sont affectés de signe plus, et ceux se trouvant des côtés opposés, de signe moins.

Le produit des diagrammes *1* et *8* donne

$$A_1 M_{bc} = -hh_3 l/3 = -40 \cdot 1 \cdot 2/3 = -80/3 \text{ kN} \cdot \text{m}^3.$$

Pour les diagrammes *5* et *8*, on a

$$-f_1 l h_3/4 = -40 \cdot 2 \cdot 1/4 = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}^3.$$

En multipliant les diagrammes *2* et *9*, on obtient

$$-(hl/6)(2h_4 + h_5) = -1 \cdot 2(2 \cdot 160 + 80)/6 = -400/3 \text{ kN} \cdot \text{m}^3.$$

Le produit des diagrammes *4* et *9* amène

$$hh_3 l/3 = 1 \cdot 280 \cdot 2/3 = 560/3 \text{ kN} \cdot \text{m}^3.$$

Pour les diagrammes *6* et *9*, il vient

$$-\frac{hl}{6}(2h_4 + h_5) = -\frac{1 \cdot 2}{6}(2 \cdot 120 + 40) = -\frac{280}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}^3.$$

En sommant ces produits, on obtient $EIy_D = -86{,}7 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$. Le signe moins montre que le point D se déplace non pas en bas, comme une force unitaire orientée, mais en haut. Ce même résultat a été obtenu dans ce qui précède à l'aide de l'équation universelle (cf. exemple VII.11).

Certes, dans l'exemple considéré le diagramme pouvait être « stratifié » seulement sur le tronçon AD puisque sur le tronçon DB le diagramme global est rectiligne et aucun besoin n'est de le « stratifier ». Sur le tronçon BC la « stratification » n'est pas imposée du fait que là le diagramme de la force unitaire est nul. La « stratification » du diagramme sur le tronçon BC est nécessaire pour déterminer la flèche au point C.

Exemple VII.15. Déterminer les déplacements vertical, horizontal et angulaire de la section B de la barre coudée de la figure VII.24, *a*. La rigidité de la section de la barre verticale est EI_1, celle de la section du tronçon horizontal, EI_2.

Solution. Construisons le diagramme des moments fléchissants dus à la charge représenté sur la figure VII.24, *b* (cf. l'exemple VI.9). Pour déterminer le déplacement vertical de la section B choisissons l'état auxiliaire du système de la figure VII.24, *c*. Au point B est appliquée la force verticale unitaire dirigée en bas.

Le diagramme des moments fléchissants de cet état est donné par la figure VII.24, *c*.

Le déplacement vertical est établi par la méthode de Mohr en recourant au procédé de multiplication des diagrammes. Etant donné qu'à l'état auxiliaire la barre verticale ne possède pas de diagramme de M_1, faisons le produit seulement des diagrammes relatifs à la barre horizontale. L'aire du diagramme est prise à partir de l'état de sollicitation, et l'ordonnée, à partir de l'état auxiliaire. Le déplacement vertical $\Delta_v = \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_1 \frac{1}{2} l_2$.

Les deux diagrammes se reposant en bas, le produit est pris avec le signe plus. Donc, le point B se déplace en bas, c'est-à-dire dans la même direction que la force verticale unitaire.

Pour déterminer le déplacement horizontal du point B, choisissons l'état auxiliaire à force unitaire horizontale dirigée à gauche (fig. VII.24, *d*). Pour ce cas, le diagramme des moments est représenté sur le même dessin.

En multipliant les diagrammes de M_f et de M_2, on obtient

$$\Delta_h = \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} Fl_1 l_1 \frac{2}{3} l_1 + \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_2 l_1.$$

Le produit des diagrammes est positif étant donné qu'ils se trouvent du même côté des barres.

Pour calculer le déplacement angulaire, choisissons l'état auxiliaire du système d'après la figure VII.24, *e* et construisons le diagramme des moments fléchissants pour cet état (sur le même dessin). Faisons le produit des diagrammes de M_f et M_3

$$\vartheta = \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} Fl_1 l_1 \cdot 1 + \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_2 \cdot 1.$$

Ce produit est positif du fait que les diagrammes se trouvent du même côté. Par conséquent, la section B tourne dans le sens horaire.

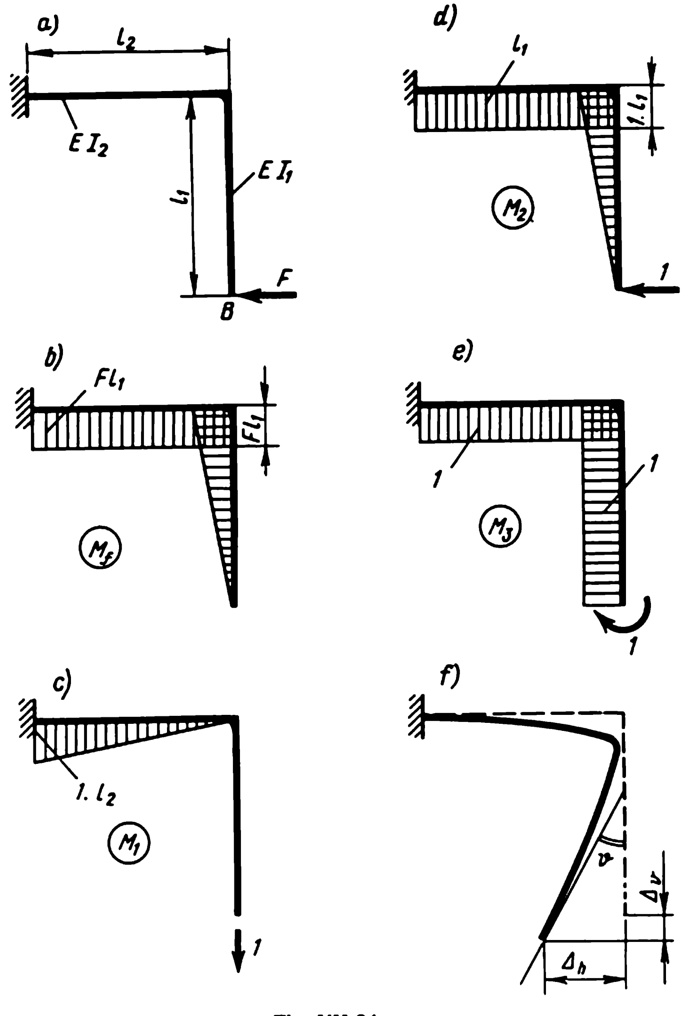


Fig. VII.24

Les mêmes résultats s'obtiennent si l'on utilise les tableaux de multiplication des diagrammes.

La déformation de la poutre est visualisée par la figure VII.24, *f*, les déplacements y étant fortement exagérés.

§ 63. Calcul des poutres hyperstatiques

Les poutres subissant des efforts intérieurs qui ne sont pas déterminés par les seules équations d'équilibre sont dites *hyperstatiques*. Pour leur calcul, en plus des équations de la statique, il faut composer des équations

complémentaires appelées *équations des déplacements* ou *équations des déformations*. Ces dernières s'obtiennent en considérant les conditions de la déformation de la poutre.

Examinons, par exemple, la poutre de la figure VII.25, *a*. Il y a quatre réactions d'appui inconnues : trois réactions d'encastrement et une réaction de l'appui glissant. Les équations de la statique sont au nombre de trois. Donc, il n'y a qu'une inconnue de trop. On dit que la poutre est

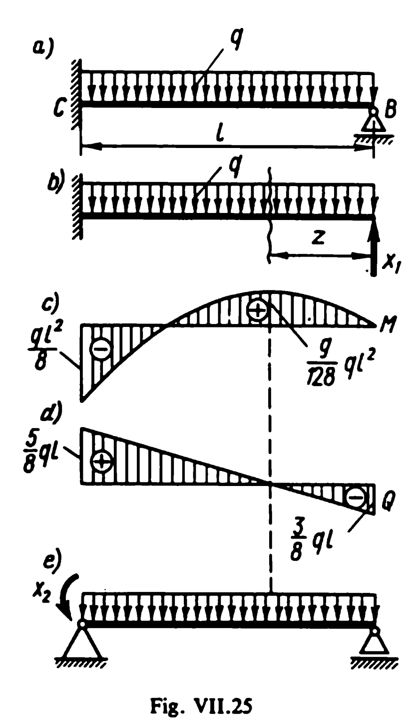


Fig. VII.25

hyperstatique du premier degré. Dans les problèmes de ce type, les inconnues superflues sont dues à la présence des liaisons en excès pour l'équilibre d'un corps solide.

Pour calculer les poutres hyperstatiques, il faut appliquer la méthode déjà connue et utilisée pour la résolution des problèmes de traction et de torsion. A cet effet, la poutre hyperstatique donnée est transformée en pensée en poutre isostatique en rejetant les liaisons excédentaires et en les remplaçant par des réactions inconnues.

Le système isostatique ainsi obtenu s'appelle *système principal*. Pour qu'il ne se distingue pas du système donné, il faut imposer qu'au droit des liaisons éliminées du système principal les déplacements des sections dans le sens des réactions inconnues appliquées soient nuls. Ces équations qui expriment les conditions de la compatibilité des déplacements du système

principal avec les liaisons imposées au système hyperstatique donné permettent de résoudre le problème.

Ces équations portent donc le nom d'*équations de compatibilité des déformations* (plus précisément, des déplacements).

Il existe pour une même poutre hyperstatique plusieurs modes de choix du système principal. Par exemple, on peut éliminer l'appui glissant en le remplaçant par la force inconnue X_1 (fig. VII.25, *b*). Dans ce cas, l'équation des déformations exprime l'idée que, pour assurer l'équivalence du système donné au système principal, le déplacement de l'extrémité droite de la poutre (point B) sous l'action de la charge q et de la force X_1 doit être nul.

Pour établir les flèches (les déplacements), on peut appliquer l'équation universelle ou la méthode de Mohr. S'il existe des formules toutes prêtes, il faut, naturellement, les utiliser aussi. Par exemple, pour composer l'équation des déplacements (pour le système principal d'après la figure VII.25, *b*) on peut appliquer les formules (VII.9) et (VII.24) déjà examinées.

En égalant les flèches de l'extrémité droite de la console, dues à la charge uniformément répartie et à la force concentrée, on obtient

$$ql^4/(8EI) = X_1 l^3/(3EI).$$

Cette équation permet de calculer $X_1 = {}^3/_8 ql$. Ensuite, les diagrammes de M (fig. VII.25, *c*) et de l'effort tranchant Q (fig. VII.25, *d*) sont tracés comme pour une poutre isostatique.

Dans la deuxième variante du système principal (fig. VII.25, *e*) on supprime la liaison qui empêche la rotation de la section gauche (l'encastrement est remplacé par une articulation fixe). Son action est remplacée par un moment inconnu X_2. L'équation complémentaire traduit la condition que sous l'action de la charge q et du moment X_2 au point C l'angle de rotation de la section soit nul.

Le choix de tel ou tel système principal n'influe pas sur le résultat final. Les diagrammes définitifs de M et de Q sont les mêmes indépendamment du choix du système. Pourtant, ce choix détermine la lourdeur plus ou moins grande du calcul. Pour les poutres à une inconnue superflue, cette lourdeur est pratiquement la même quel que soit le système. Mais lorsqu'il y a plusieurs inconnues surabondantes, le système principal doit être choisi de façon que la solution des systèmes d'équations des déplacements réduit au minimum les difficultés de calcul. Si pour une poutre à nombreuses travées, dite souvent *continue* (fig. VII.26, *a*), on choisit comme inconnues en excès les réactions des appuis rejetés, dans chacune des équations des déplacements figureraient toutes les inconnues superflues, ce qui rendrait la résolution du système d'équations bien plus difficile.

Lorsque le choix du système principal est correct, les inconnues des équations des déplacements sont séparées, c'est-à-dire que chaque équation compte moins d'inconnues. Certes, le nombre total d'équations ne change

pas, en restant égal au nombre d'inconnues superflues, mais au lieu de résoudre un système d'équations à grand nombre d'inconnues, il faut traiter plusieurs systèmes plus simples.

Ainsi, dans ce cas une simplification importante s'obtient en retenant comme inconnues en excès les moments fléchissants intérieurs appliqués aux sections passant par les appuis intermédiaires (ce qu'on appelle couples de réaction : fig. VII.26, *b*). Alors, dans le système principal, des articula-

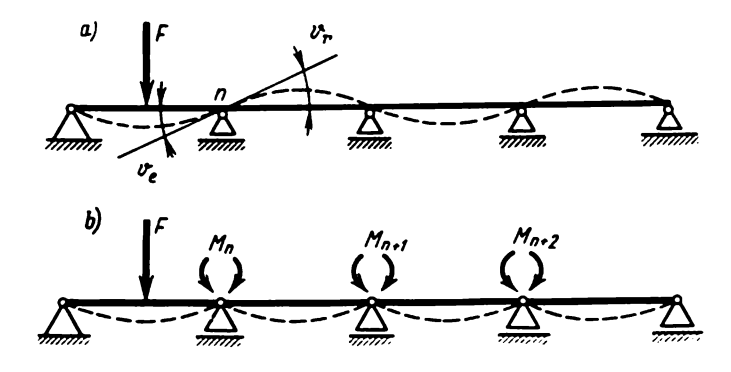


Fig. VII.26

tions sont « encastrées » dans la poutre au-dessus de chaque appui intermédiaire et la liaison compromise entre les travées, qui empêchait la rotation réciproque des sections disposées des deux côtés de l'appui, est remplacée par des couples de réaction inconnus.

Les équations des déplacements traduisent alors la condition de l'égalité des angles de rotation des sections d'appui de la poutre sur les travées connexes, par exemple pour la section de l'appui *n* (fig. VII.26, *a*) : $\vartheta_l = \vartheta_r$.

La résolution de ces équations montre que chacune d'elles ne compte pas plus de trois couples de réaction.

Dans le calcul des poutres hyperstatiques, comme pour tout autre système hyperstatique, il faut utiliser également l'une des méthodes énergétiques, par exemple celle fondée sur le principe de la moindre action (cf. § 19).

Pour la poutre représentée sur la figure VII.25, l'énergie potentielle de la déformation s'écrit

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2 dz = \frac{1}{2EI}\int_0^l \left(X_1 z - \frac{qz^2}{2}\right)^2 dz =$$

$$= \frac{1}{2EI}\left(\frac{X_1 l^3}{3} - \frac{X_1 q l^4}{4} + \frac{q^2 l^5}{20}\right).$$

Conformément au principe de la moindre action, on a

$$\partial U/\partial X_1 = {}^2/_3 X_1 l^3 - ql^4/4 = 0, \text{ d'où } X_1 = {}^3/_8 ql.$$

§ 64. Exemples de calcul des poutres hyperstatiques

Exemple VII.16. Construire les diagrammes de M et de Q pour la poutre représentée sur la figure VII.27, *a*.

Solution. Etablissons sans peine que cette construction comporte une liaison superflue. Choisissons le système principal sous la forme d'une console à appui droit supprimé et remplacé par la réaction inconnue X (fig. VII.27, *b*). L'équation des déplacements est de la forme $v_B = 0$.

Sous l'action de la force X (fig. VII.27, *c*) la flèche en B [cf. la formule (VII.9)] est égale à $f_{BX} = Xl^3/(3EI)$.

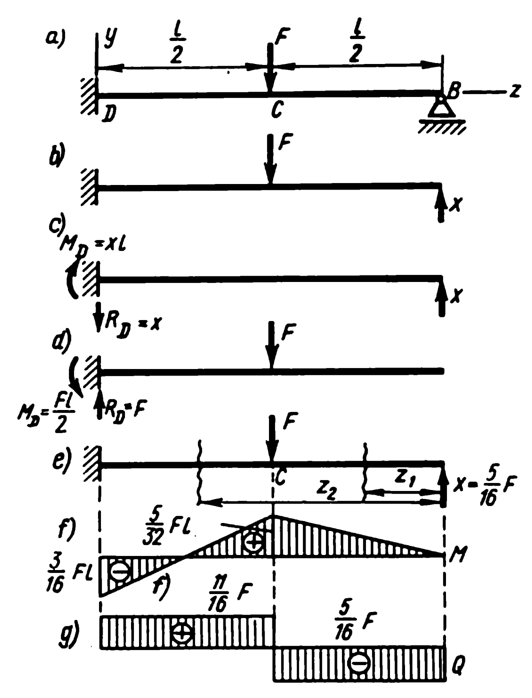


Fig. VII.27

Pour déterminer la flèche au point B produite par la force F (fig. VII.27, *d*), utilisons l'équation universelle (VII.22). Plaçons l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre ; alors, $f_0 = 0$ et $\vartheta_0 = 0$.

Déterminons les réactions d'appui : $R_D = F$ et $M_D = Fl/2$ (fig. VII.27, *d*). Ecrivons l'équation universelle en adoptant que $z = l$:

$$EIf_{Bf} = -\frac{M_D(l-0)^2}{2} + \frac{R_D(l-0)^3}{6} - \frac{F\left(l - \frac{l}{2}\right)^3}{6}.$$

En y portant la valeur de $M_D = Fl/2$ et $R_D = F$, on obtient $f_{Bf} = -5Fl^3/(48EI)$.

L'équation des déplacements devient maintenant $Xl^3/(3EI) - 5Fl/(48EI) = 0$, d'où $X = {}^5/_{16}F$.

En une section quelconque du tronçon *CB* à la distance z_1 de l'extrémité droite (fig. VII.27, *e*) le moment fléchissant $Mz_1 = Xz_1 = {}^5/_{16}Fz_1$; dans le tronçon *DC* : $Mz_2 = {}^5/_{16}Fz_2 - F(z_2 - l/2)$.

Le diagramme de *M* est représenté sur la figure VII.27, *f*.

L'effort tranchant dans le tronçon *CB* : $Qz_1 = -X = -{}^5/_{16}F$; dans le tronçon *DC* : $Qz_2 = -{}^5/_{16}F + F = {}^{11}/_{16}F$.

Le diagramme de *Q* est représenté sur la figure VII.27, *g*.

Exemple VII.17. Dresser les diagrammes de *M* et de *Q* pour une poutre à deux travées, représentée sur la figure VII.28, *a*.

Solution. C'est un problème hyperstatique du premier degré : adoptons comme inconnue superflue la réaction *X* de l'appui du milieu (fig. VII.28, *b*). L'équation des déplacements est de la forme $v_B = 0$.

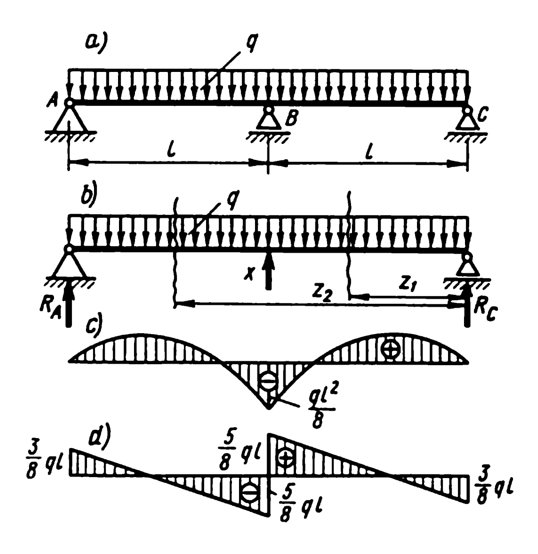


Fig. VII.28

A la différence de l'exemple précédent, nous ne montrons pas sur le dessin le système principal soumis seulement à des forces données, tout comme le système principal sollicité seulement par la réaction *X* cherchée.

La flèche en *B* due à l'action de la charge *q* est déterminée par la formule (VII.28) :

$$f_{Bq} = -\frac{5}{384}\frac{q(2l)^4}{EI}.$$

La flèche en *B* due à l'action de la force *X* est déterminée par (VII.29) :

$$f_{BX} = X(2l)^3/(48/EI).$$

L'équation des déplacements devient

$$\frac{-5q(2l)^4}{384EI} + \frac{X(2l)^3}{48EI} = 0,$$

d'où
$$X = {}^{5}/_{4}ql.$$
Les réactions R_A et R_C valent
$$R_A = R_C = ql - {}^{5}/_{8}ql = {}^{3}/_{8}ql.$$

Le moment fléchissant en une section quelconque à la distance z_1 de l'appui C du tronçon BC
$$Mz_1 = {}^{3}/_{8}qlz_1 - qz_1^2/2.$$
Construisons d'après cette équation le diagramme de M (fig. VII.28, *c*). Le diagramme de la moitié gauche de la poutre est symétrique.

Dans le tronçon BC l'effort tranchant
$$Qz_1 = -{}^{3}/_{8}ql + qz_1 \ ;$$
dans le tronçon AB :
$$Qz_2 = {}^{3}/_{8}ql - {}^{5}/_{4}ql + qz_2.$$
D'après ces équations, construisons le diagramme de Q (fig. VII.28, *d*).

§ 65. Principes de la méthode générale de calcul des systèmes hyperstatiques (principes de la méthode des forces)

Dans les paragraphes précédents, nous avons soumis à l'étude les poutres hyperstatiques. En technique on rencontre également des systèmes hyperstatiques plus compliqués, c'est-à-dire des *systèmes où les efforts intérieurs ne peuvent être déterminés par aucune des équations d'équilibre.*

Les systèmes hyperstatiques composés de barres à liaisons rigides s'appellent *cadres*. Les méthodes de calcul des systèmes de barres hyperstatiques sont exposées en détail dans un cours de « Mécanique des constructions ». Ces méthodes sont très variées. Nous exposerons seulement les principes de la méthode des forces la plus usitée et l'illustrerons par des exemples des systèmes hyperstatiques les plus simples.

Dans le calcul des systèmes hyperstatiques par la méthode des forces on retient comme inconnues les efforts qui remplacent l'action des liaisons rejetées surabondantes. Ces liaisons sont superflues du point de vue de l'assurance de la fixité de la barre comme d'un tout rigide. Dans le plan, la fixité d'une barre peut être assurée par trois liaisons imposées de la façon correspondante. Les liaisons de cette sorte sont dites *nécessaires*. Les liaisons imposées au corps en plus de celles qui sont nécessaires sont dites *complémentaires* ou *superflues* (surabondantes).

Dans l'espace, la fixité d'une barre est assurée par six liaisons.

Voici l'ordre de calcul des systèmes hyperstatiques d'après la méthode des forces.

1. Déterminer le degré d'hyperstatisme en calculant le nombre de liaisons surabondantes.

2. Après l'élimination des liaisons en excès choisir le *système principal* en fonction du système donné. Les liaisons éliminées sont remplacées par les efforts inconnus superflus.

3. Composer les équations des déformations (plus exactement, des déplacements) qui expriment les conditions de compatibilité des déplacements du système principal avec le système hyperstatique donné. Si dans le système principal les déplacements dans la direction des liaisons rejetées sont nuls, les équations expriment l'annulation de ces déplacements.

4. Résoudre les équations obtenues.

5. Après l'établissement des inconnues surabondantes trouver les efforts intérieurs dans les éléments du système (moments fléchissants, efforts tranchants, etc.). Ceci se fait sans difficultés sur la base de la méthode des sections.

Dans les calculs des systèmes hyperstatiques par la méthode des forces, les équations s'écrivent sous une forme définie (*canonique*).

Si le système hyperstatique donné possède n inconnues surabondantes, le système de n équations canoniques qui assure leur calcul s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1f} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2f} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nf} &= 0. \end{aligned}$$

Dans la première équation δ_{11} est le déplacement du point d'application de la première inconnue superflue dans la direction propre sous l'action de la valeur unitaire de cette inconnue. Le produit $\delta_{11}X_1$ est le déplacement de ce même point dans la même direction, provoqué par la force X_1.

Le deuxième terme $\delta_{12}X_2$ est le déplacement de ce même point dans la même direction, dû à la force X_2, etc.

Le terme Δ_{1f} est le déplacement en ce même endroit et dans la même direction dû à la charge.

Dans l'ensemble, le premier membre tout entier de la première équation présente le déplacement global du point d'application de la force X_1 dans la direction de cette force, réalisé sous l'action de toutes les forces. Ce déplacement s'annule du fait que dans le système considéré il n'existe pas.

La deuxième équation traduit la condition que le déplacement global du point d'application de la force X_2 dans la direction de cette force, produit par toutes les actions subies, est nul.

Le sens des autres équations est clair.

Ce n'est pas la composition des équations des systèmes hyperstatiques qui présente des difficultés, mais c'est leur résolution.

Lorsque le nombre d'équations est peu grand, elles peuvent être résolues sans difficulté par la méthode de l'élimination successive des incon-

nues. Dans le cas où le nombre d'équations est grand, il faut recourir à des astuces spéciales qui rendent plus facile la résolution (méthodes de Gauss, des approximations successives, de la machine) ; ces équations sont traitées de plus près dans le cours de « Mécanique des constructions ».

La technique de calcul des systèmes hyperstatiques les plus simples est illustrée par les exemples concrets qui suivent.

Exemple VII.18. Construire le diagramme des moments fléchissants du cadre représenté sur la figure VII.29, *a*. Toutes ses barres ont la même rigidité.

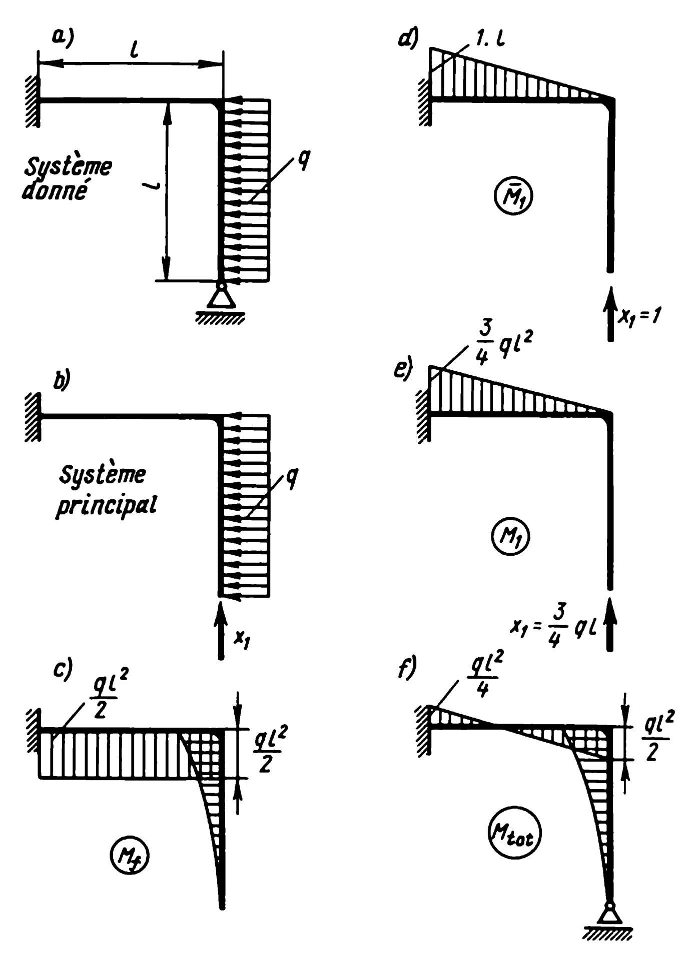


Fig. VII.29

Solution. Ce cadre est un système hyperstatique du premier degré. En effet, il y a en tout quatre ráctions d'appui inconnues (trois dans l'encastrement et une dans l'appui droit). Alors que les équations d'équilibre ne sont qu'au nombre de trois.

Prenons pour base le système de la figure VII.29, *b* qui s'obtient à partir du système donné par élimination de l'appui droit. L'inconnue surabondante qui compense la liaison éliminée est notée X_1. Composons l'équation des déplacements et, à cet effet, annulons le déplacement dans la direction de X_1.

Pour le cas considéré, l'équation canonique est de la forme

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0,$$

où δ_{11} est le déplacement dans la direction de la première inconnue, produit par cette même inconnue de valeur unitaire ; Δ_{1f}, le déplacement dans la direction de la première inconnue dû à la charge.

Pour déterminer le déplacement, appliquons la méthode de Mohr-Vérechtchaguine (multiplication des diagrammes).

La figure VII.29, *c* représente le diagramme des moments fléchissants, produits par la charge. La figure VII.29, *d* montre le diagramme des moments $\bar{M}_1$, produits par la force unitaire $X_1 = 1$.

Pour déterminer le déplacement δ_{11}, multiplions le diagramme de $\bar{M}_1$ par lui-même pour obtenir

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\frac{1}{2}ll\frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EI}.$$

Pour établir le déplacement Δ_{1f} faisons le produit des diagrammes de M_f et de $\bar{M}_1$ compte tenu du fait que ces moments reposent des côtés différents de la barre (horizontale) :

$$\Delta_{1f} = -\frac{1}{EI}\frac{ql^2}{2}l\frac{l}{2} = -\frac{ql^4}{4EI}.$$

Donc,

$$l^3X_1/(3EI) - ql^4/(4EI) = 0,$$

d'où $X_1 = {}^3/_4ql$.

La valeur positive obtenue de X_1 témoigne que la direction retenue correspond à la direction réelle.

Le problème est résolu.

Maintenant on peut construire le diagramme des moments fléchissants du système donné. Le plus simple est de le faire de la façon suivante : augmenter le diagramme de $\bar{M}_1$ de ${}^3/_4ql$ fois (pour obtenir le diagramme de M_1) et le sommer avec le diagramme de M_f.

Le diagramme de M_1 est représenté sur la figure VII.29, *e*. En le sommant avec le diagramme de M_f, on obtient le diagramme définitif (global) de M_{tot} représenté sur la figure VII.29, *f*.

Exemple VII.19. Construire le diagramme des moments fléchissants du cadre représenté sur la figure VII.30, *a*.

Solution. Ce cadre est également hyperstatique du premier degré. Le système principal est représenté sur la figure VII.30, *b*; la figure VII.30, *c* donne le diagramme des moments produits par la charge, et la figure VII.30, *d*, le diagramme dû à la valeur unitaire de l'inconnue surabondante.

L'équation canonique des déplacements

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

Calculons δ_{11} en multipliant le diagramme de $\bar{M}_1$ par lui-même :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\frac{1}{2}ll\frac{2}{3}l + \frac{1}{EI}lll = \frac{4l^3}{3EI}.$$

Calculons Δ_{1f} en faisant le produit des diagrammes de M_f et de $\bar{M}_1$.

Pour multiplier la parabole par le triangle (sur la barre verticale), utilisons les données du tableau VII.2 de la multiplication des diagrammes

$$\Delta_{1f} = -\frac{1}{EI}\frac{ql^2}{2}\frac{l\cdot l}{2} - \frac{1}{EI}\frac{ql^2}{2}ll = -\frac{5ql^4}{8EI}.$$

Par conséquent, $X_1 = -\Delta_{1f}/\delta_{11} = 15\,ql/32$.

Augmentons les ordonnées du diagramme de $\bar{M}_1$ de $15\,ql/32$ fois (fig. VII.30, *e*) et additionnons-les avec les ordonnées du diagramme de M_f. Le diagramme global des moments est donné par la figure VII.30, *f*.

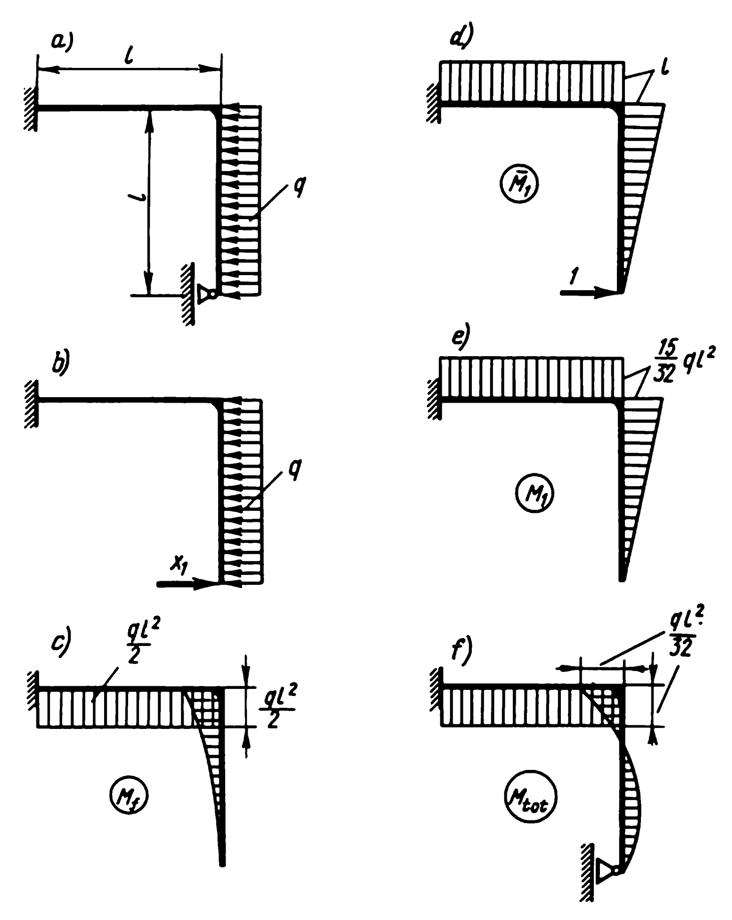


Fig. VII.30

Exemple VII.20. Construire le diagramme des moments fléchissants du cadre de la figure VII.31, *a*.

Solution. Ce cadre est hyperstatique du deuxième degré. Comme système principal retenons la barre coudée représentée sur la figure VII.31, *b*.

Pour un système à deux inconnues les équations canoniques sont de la forme

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1f} = 0 ;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0.$$

La première équation exprime la condition que le déplacement dans le sens de la première inconnue, produit par toutes les actions, est nul, et la deuxième équation, la condition que le déplacement dans la direction de la deuxième inconnue, dû à toutes les actions, est nul lui aussi.

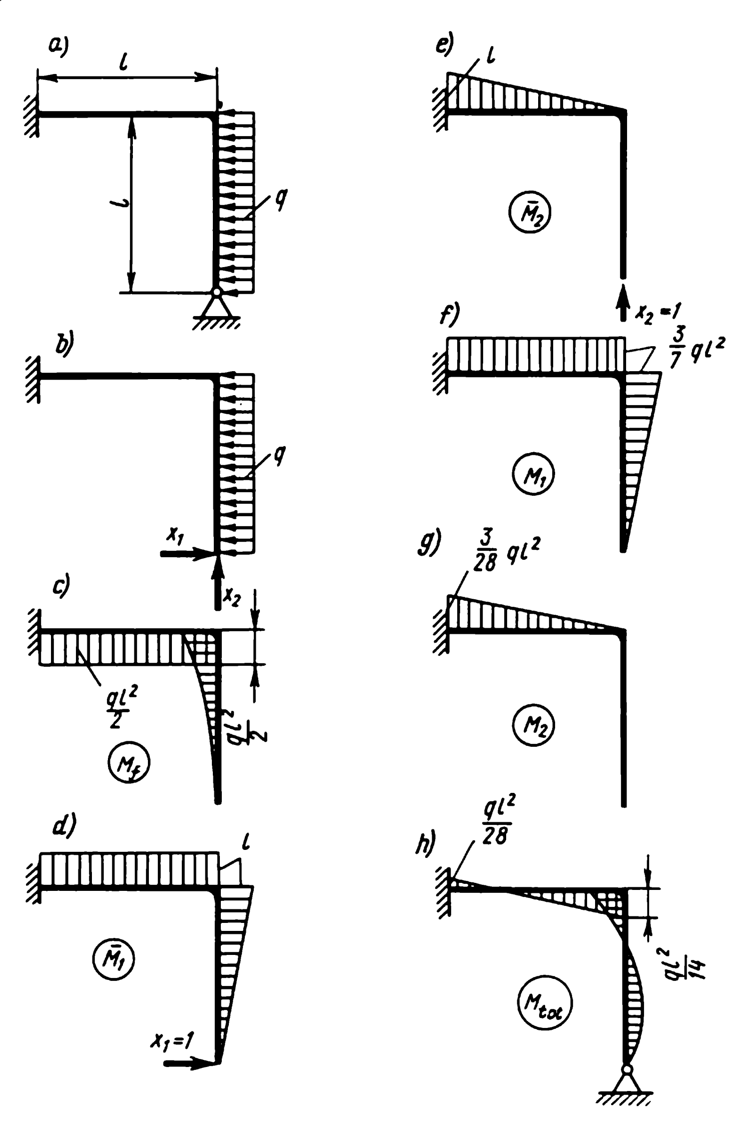


Fig. VII.31

Les coefficients des équations sont déterminés par multiplication des diagrammes.

Les déplacements δ_{11} et δ_{22} sont dits principaux, et δ_{12} et δ_{21}, auxiliaires. En vertu du théorème de Maxwell sur la réciprocité des déplacements, on a $\delta_{12} = \delta_{21}$.

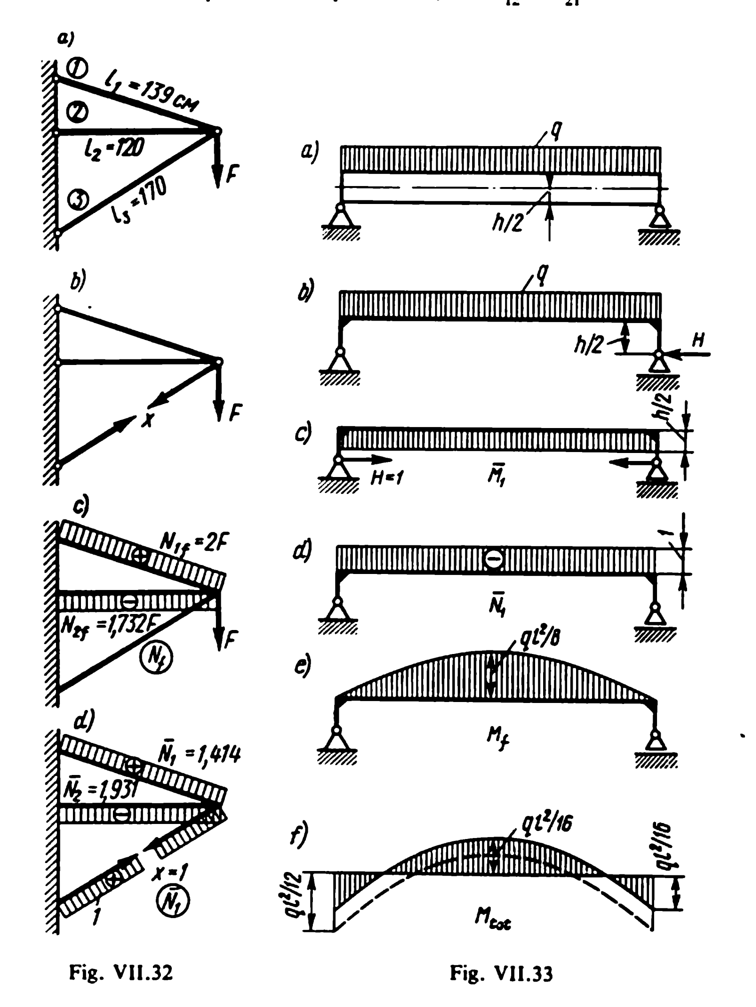


Fig. VII.32

Fig. VII.33

Les diagrammes dus à la charge ainsi qu'aux valeurs unitaires des inconnues surabondantes sont donnés par les figures VII.31, *c*, *d*, *e*. Le produit du diagramme de M_1 par lui-même amène (cf. exemple précédent) :

$$\delta_{11} = 4l^3/(3EI)\ ;\quad \delta_{22} = l^3/(3EI)\ ;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\,\frac{1}{2}\,lll = \frac{l^3}{2EI}\ ;$$

$$\Delta_{1f} = -\frac{5}{8}\,\frac{ql^4}{EI}\ ;\quad \Delta_{2f} = -\frac{ql^4}{4EI}.$$

En portant ces résultats dans l'équation canonique et en réduisant par le facteur commun $l^3/(EI)$, on obtient

$$\tfrac{4}{3}X_1 + \tfrac{1}{2}X_2 - \tfrac{5}{8}ql = 0 ;$$
$$\tfrac{1}{2}X_1 + \tfrac{1}{3}X_2 - \tfrac{1}{4}ql = 0.$$

La résolution de ce système d'équations donne

$$X_1 = \tfrac{3}{7}ql ; \quad X_2 = \tfrac{3}{28}ql.$$

Les diagrammes des moments dus à l'action des X_1 et X_2 sont représentés sur les figures VII.31, *f*, *g*. Le diagramme global des moments fléchissants est donné par la figure VII.31, *h*.

Exemple VII.21. Déterminer les efforts dans les barres du système examiné au § 20, exemple II.12 (fig. VII.32, *a*).

Solution. Le système est hyperstatique du premier degré. Comme inconnue surabondante on adopte l'effort dans la barre inférieure (fig. VII.32, *b*). L'équation canonique de la méthode des forces est de la forme

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0.$$

Etant donné que dans ce système les barres ne travaillent qu'à la traction ou à la compression, le déplacement est déterminé par la formule

$$\delta = \sum \frac{N_k N_f l_i}{E_i A_i}$$

ou, d'après la règle de Vérechtchaguine, en multipliant les diagrammes correspondants des efforts normaux (fig. VII.32, *c*, *d*).

Les efforts dus à la charge dans les barres *1* et *2* sont (cf. exemple II.12) : $N_{1f} = 2F$ (traction) ; $N_{2f} = -1{,}732\,F$ (compression). Les efforts dans les barres *1* et *2* dus à l'inconnue $X = 1$ valent : $\bar{N}_1 = 1{,}414$ (traction) ; $\bar{N}_2 = -1{,}931$ (compression).

Calculons les déplacements

$$\delta_{11} = \frac{1}{E}\sum \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{A_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{1{,}414^2\cdot 139}{3{,}14} + \frac{1{,}931^2\cdot 120}{3{,}14} + \frac{1^2\cdot 170}{21{,}9}\right) = \frac{238{,}75}{E} ;$$

$$\Delta_{1f} = \frac{1}{E}\sum \frac{\bar{N}_i N_f l}{A_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{1{,}414\cdot 2F\cdot 139}{3{,}14} + \frac{1{,}931\cdot 1{,}732F\cdot 120}{3{,}14}\right) = \frac{253F}{E}.$$

Pour trouver

$$X = N_3 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = -\frac{253F}{238{,}75} = -1{,}059F \text{ (compression) ;}$$

$$N_1 = 2F - 1{,}414\cdot 1{,}059F = 0{,}503F ;$$

$$N_2 = -1{,}732F + 1{,}931\cdot 1{,}059F = 0{,}315F.$$

Ce résultat coïncide avec celui obtenu dans l'exemple II.12 par une autre méthode.

Exemple VII.22. Construire les diagrammes de M et de Q pour la poutre représentée sur la figure VII.33, *a*.

Solution. Cette poutre est hyperstatique du premier degré, l'allongement en flexion de la fibre intérieure de la poutre étant éliminé par les articulations fixes au niveau de la fibre inférieure (la poutre serait isostatique si les articulations se trouvaient au niveau de l'axe de la poutre).

Adoptons comme inconnue surabondante la force horizontale H (poussée) ; utilisons pour sa détermination l'équation canonique usuelle de la méthode des forces (fig. VII.33, *b*) :

$$\delta_{11}H + \Delta_{1f} = 0.$$

Les déplacements se calculent d'après la méthode de Mohr-Vérechtchaguine, le déplacement δ_{11} étant déterminé par la formule (VII.45) :

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2 dz}{EI} + \int_0^l \frac{N_1^2 dz}{EA},$$

c'est-à-dire compte tenu de l'effort normal, du fait que dans ce cas son action est importante, ce que l'on démontre par la suite. Les diagrammes correspondants sont représentés sur les figures VII.33, *c, d, e* pour l'action de la charge uniformément répartie q.

Alors, suivant la méthode de Vérechtchaguine, on obtient pour une poutre à axe au milieu de la hauteur

$$\delta_{11} = \frac{h^2 l}{4EI} + \frac{l}{EA}\ ;\quad \Delta_{1f} = \int_0^l \frac{M_1 M_f dz}{EI} = -\frac{qhl^3}{24EI}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation canonique, il vient

$$H = \frac{qhl^3/(24EI)}{h^2 l/(4EI) + l/(EA)}.$$

Le deuxième terme du dénominateur traduit l'influence des efforts normaux. Si cette influence est négligée, il vient

$$H = ql^2/(6h).$$

La formule de H peut s'écrire

$$H = \frac{ql^2}{6h} K,$$

où K est le coefficient qui définit l'influence des efforts normaux ; il dépend de la forme de la section droite de la poutre :

$$K = 1\Bigg/\left(\frac{Ah^2}{4I} + 1\right).$$

Pour les cas particuliers : section circulaire $K = 0{,}80$; sections rectangulaire et carrée $K = 0{,}75$; section en H $K \approx 0{,}63$.

A en juger d'après le coefficient K, l'influence des efforts normaux est importante, surtout pour les poutres en H.

Après avoir déterminé H les moments fléchissants se calculent sans peine pour toute section d'après la formule générale :

$$M = M_f + M_1 H.$$

Par exemple, pour une barre de section rectangulaire, on obtient le moment fléchissant dans l'appui

$$M_0 = -Hh/2 = -Kql^2/12 = -ql^2/16\ ;$$

au milieu de la travée $M_{l/2} = ql^2/16$. Le diagramme correspondant de M_{tot} est donné par la figure VII.33, *d*.

Négligeons l'action des efforts normaux pour obtenir respectivement

$$M_0 = -ql^2/12 \quad \text{et} \quad M_{l/2} = ql^2/24\ ;$$

c'est-à-dire la même chose que pour une poutre encastrée complètement aux extrémités (fig. VII.33, *f* ; pointillé).

En effet, dans le dernier cas l'application de la condition de la longueur invariable de la fibre inférieure cumulée avec la condition de la longueur invariable de la ligne axiale de la poutre ($N = 0$) est équivalente à la condition de l'encastrement des extrémités de la poutre.

Le diagramme de l'effort tranchant Q est le même que pour une poutre isostatique (cf. fig. VI.12).

§ 66. Disposition rationnelle des appuis des poutres

Du point de vue de l'économie des matériaux, la disposition correcte des appuis des poutres a une importance capitale si, certes, les considérations de production ou d'autres genres n'y font pas d'obstacle. Ceci se rapporte aussi bien aux poutres isostatiques qu'hyperstatiques.

Pour une poutre simple reposant sur les extrémités et soumise à une charge uniformément répartie, le moment fléchissant maximal (fig. VII.34, *a*) a lieu au milieu de la travée : $M_{max} = ql^2/8$. On voit sans peine que pour une poutre de même longueur mais en présence des consoles (fig. VII.34, *b*), le moment fléchissant est plus petit.

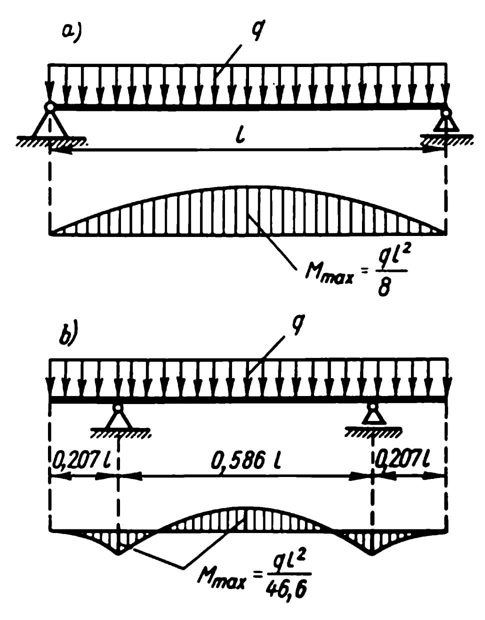


Fig. VII.34

Le moment fléchissant maximal est le plus petit lorsque le moment dans la section d'appui est égal au moment maximal dans la travée. Cette condition est remplie si la longueur de chaque console est de $0{,}207l$. Le moment fléchissant maximal M_{max} ainsi obtenu est égal à $ql^2/46{,}6$.

Ainsi, la disposition correcte des appuis rend possible la réduction du moment fléchissant à peu près de six fois.

Nous recommandons au lecteur de trouver la longueur la plus avantageuse d'une poutre à console subissant une charge uniformément répartie.

Pour une poutre hyperstatique à deux travées il faut traiter trois moments fléchissants M_A, M_B et dans la travée, M_l (fig. VII.35, *a*, *b*).

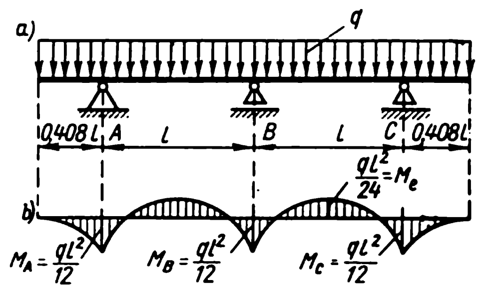


Fig. VII.35

Pour que la poutre ait une section minimale constante sur toute la longueur, il faut assurer l'égalité de deux plus grands de ces trois moments.

Nous recommandons également au lecteur de démontrer que la valeur minimale des moments fléchissants s'obtient pour une longueur des consoles égale à $0{,}408l$; de plus, $M_A = M_B = ql^2/12$; $M_l = ql^2/24$.

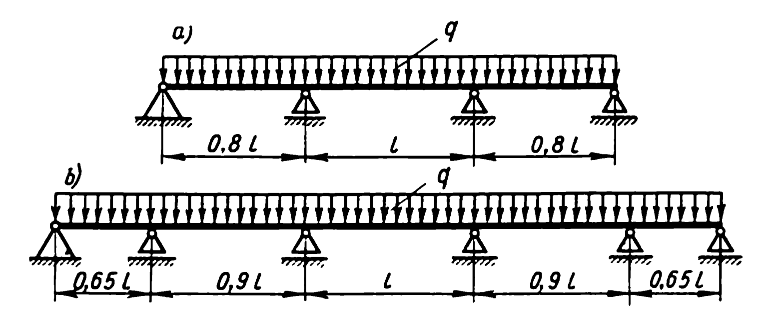


Fig. VII.36

Pour une poutre de même longueur ($0{,}408l \cdot 2 + 2l$) à deux travées et sans consoles, le moment fléchissant maximal est appliqué au tronçon au-dessus de l'appui du milieu (cf. fig. VII.35 et VII.28) :

$$M = q(1{,}408l)^2/8 = ql^2/4.$$

De la sorte, la présence de deux consoles permet de rendre le moment de calcul trois fois plus petit. Pour les poutres à trois et à cinq travées sans consoles, la disposition la plus avantageuse des travées est représentée respectivement sur les figures VII.36, *a* et VII.36, *b*.

L'analyse correspondante permet d'établir également la disposition la plus avantageuse des appuis pour d'autres formes de la charge. Supposons, par exemple, qu'une charge q est appliquée à un tronçon quelconque de la poutre. En soumettant les consoles (fig. VII.37, *a*) à la charge q_1, on obtient $M'_{max} = q_1 a^2/2$.

La sollicitation du tronçon entre les appuis (fig. VII.37, *b*) par une charge q_2 donne $M''_{max} = q_2 l^2/8$.

En égalant les valeurs maximales des moments, on obtient la valeur optimale de la longueur de la console : $a = 0{,}5l\sqrt{q_2/q_1}$.

Il faut noter que le calcul de la résistance d'après les moments fléchissants n'est pas toujours déterminant. Il arrive que la disposition des appuis

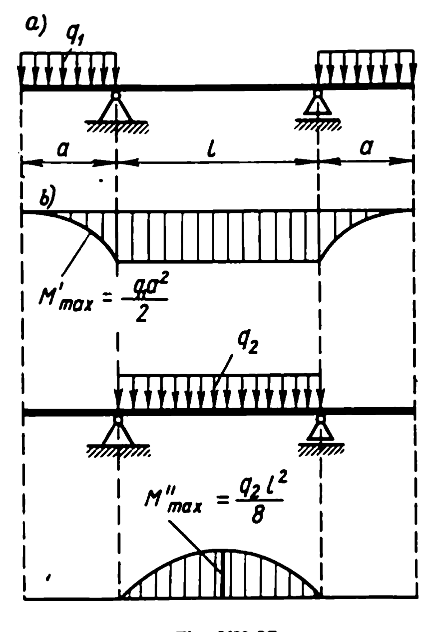


Fig. VII.37

doit être établie d'après la condition de rigidité pour obtenir des flèches minimales. Ainsi, la flèche d'une poutre simple soumise à une charge uniformément répartie (cf. fig. VII.34, *a*) est maximale au milieu

$$f = -5ql^4/(384EI) = -0{,}013\ ql^4/(EI).$$

En présence de deux consoles la flèche au milieu de la poutre diminue (cf. fig. VII. 34, *b*). La longueur optimale de la console se déduit à partir de la condition que la flèche à son extrémité soit égale à la flèche de la poutre au milieu de la travée. En utilisant l'équation universelle et en omettant les calculs qu'on recommande au lecteur de faire lui-même, on obtient la

longueur optimale de la console à partir de la condition de rigidité : $a = 0{,}223l$.

Pour cette longueur de la console, la flèche maximale de la poutre est de 0,00095 $ql^4/(EI)$, ce qui est de 13,7 fois inférieur à la flèche de la poutre sans console. D'ailleurs, ceci n'a rien d'étonnant, puisque dans la formule de la flèche la longueur de la poutre figure au quatrième degré. C'est pourquoi, par exemple, lorsque la longueur de la poutre devient deux fois plus petite, la flèche diminue de 16 fois.

Notons à titre d'exemple que dans les wagons des chemins de fer la longueur adoptée des consoles $a \approx 0{,}14l$.

§ 67. Formes rationnelles de la section des poutres

Les sections des poutres les plus favorables, du point de vue du débit des matériaux, sont celles dont la plus grande partie du matériau repose dans les parties supérieure et inférieure de la section, où les contraintes sont maximales et le matériau est le mieux utilisé (fig. VII. 38, *a*).

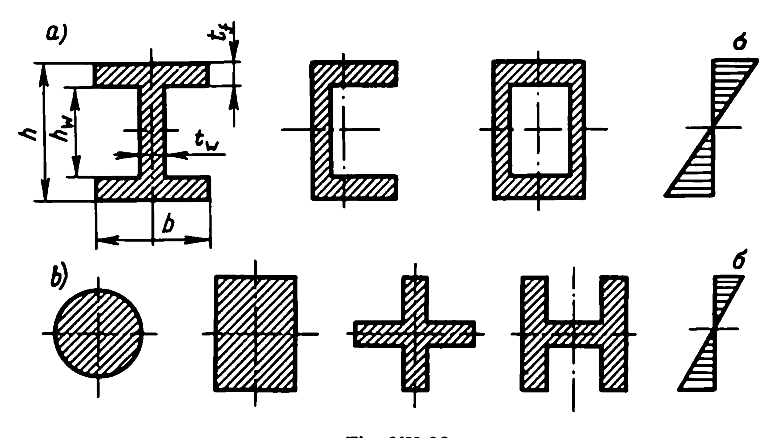


Fig. VII.38

Pour l'évaluation quantitative de l'avantage que présente la section, d'après le débit du matériau, on peut retenir la quantité sans dimension

$$w_x = W_x/\sqrt{A^3},$$

appelée *couple de réaction axial spécifique*. La quantité w_x dépend seulement de la forme de la section.

Le tableau VII.3 donne les valeurs de w_x pour certaines sections les plus usitées.

On voit que les moins favorables sont les sections circulaires, carrées et analogues dans lesquelles la plus grande quantité du matériau se concentre près de l'axe neutre, où le matériau est très peu sollicité (fig. VII.38, *b*).

Les plus avantageuses sont les sections en U;* en H et en caisson (fig. VII. 38, *a*).

Un grand intérêt pratique présente le choix correct de la hauteur des poutres en H, puisque ce profilé est le plus usité, sorti en plus grande quantité par les usines soviétiques.

Tableau VII.3

Type de la section	w_x
Rond	0,14
Carré	0,167
Anneau ($c = d/D = 0{,}9$)	0,58
Poutre en U	0,57 à 1,35
Poutre en H ordinaire	1,02 à 1,51

En résolvant ces problèmes, on peut réaliser les simplifications suivantes :

1. Négliger l'épaisseur de l'aile t_f par rapport à la hauteur de l'âme h_w, ce qui permet d'identifier cette hauteur à h, celle de toute la poutre (fig. VII. 38, *a*).

2. En calculant le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre, négliger le moment d'inertie de l'âme par rapport à l'axe central propre.

Si on adopte ces hypothèses, le moment d'inertie de la section devient

$$I_x = 2A_f(h/2)^2 + t_w h^3/12 = A_f h^2/2 + t_w h^3/12,$$

où A_f est l'aire de la section de l'aile.

Le couple de réaction

$$W_x = 2I_x/h = A_f h + t_w h^2/6,$$

d'où $A_f = W_x/h - t_w h/6$.

Par conséquent, l'aire totale de la section

$$A = 2A_f + A_w = 2W_x/h - 2t_w h/6 + t_w h = 2W_x/h + {}^2\!/_3 t_w h.$$

Maintenant, on peut trouver la valeur de h à laquelle l'aire de la section est minimale. A cet effet, il faut établir la liaison entre l'épaisseur de l'âme t_w et la hauteur h.

La figure VII.39 visualise la relation entre l'épaisseur de l'âme t_w et la hauteur h des poutres en H d'après les normes soviétiques (GOST 8239-72) (courbe *1*) et les normes des Etats-Unis plus économiques (courbe *2*). La

* Sous la condition que la torsion de la poutre est impossible.

courbe *3* traduit la relation entre t_w et h pour l'assortiment le plus économique, où pour les poutres en H n°10 est adoptée l'épaisseur minimale de 4,5 mm (déterminée par la corrosion), et pour la poutre en H n°70, l'épaisseur maximale de 10 mm ($h/t = 70$) déterminée par la condition de la stabilité locale, c'est-à-dire l'élimination du voilage local de l'âme. Sur des laminoirs, il est difficile d'obtenir un assortiment parfait, pourtant, il peut être réalisé par soudage à l'aide des soudeuses automatiques.

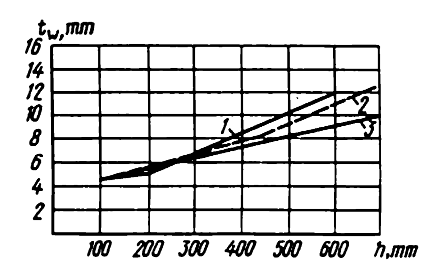


Fig. VII.39

La figure montre que la dépendance de t_w par rapport à h peut être exprimée approximativement par l'équation d'une droite ne passant pas par l'origine des coordonnées

$$t_w = \alpha + \beta h. \qquad \text{(VII.49)}$$

D'après les normes soviétiques, les coefficients α et β valent : $\alpha =$ $= 3$ mm et $\beta = 0{,}015$. Pour le profilé « parfait », les coefficients sont $\alpha = 3{,}58$ mm ; $\beta = 0{,}0092$.

En profitant de la relation de t_w (VII.49), on obtient l'aire de la section

$$A = 2W_x/h + {}^2\!/\!_3\,\alpha h + {}^2\!/\!_3\,\beta h^2. \qquad \text{(VII.50)}$$

La hauteur optimale de la poutre est obtenue en annulant la dérivée $\mathrm{d}A/\mathrm{d}h = 0$:

$$W_x - \alpha h_{\text{opt}}^2/3 - 2\beta h_{\text{opt}}^3/3 = 0. \qquad \text{(VII.51)}$$

En résolvant cette équation cubique, on calcule h_{opt}. A cet effet, on peut utiliser les tableaux, la méthode des approximations successives et, enfin, la méthode graphique. On se donne alors quelques valeurs de h_{opt}, calcule W_x d'après la formule (VII.51) et construit le graphique de la relation entre ces grandeurs. Ce graphique rend facile la résolution du problème inverse : détermination de h_{opt} d'après W_x donné.

La courbe *2* de la figure VII.40 visualise la relation optimale entre W_x et h d'après l'équation (VII.51), pour $\alpha = 3{,}58$ mm et $\beta = 0{,}0092$. La même

figure visualise sous la forme de la courbe *1* la relation entre W_x et h des poutres en H, d'après la norme soviétique GOST 8239-72.

La comparaison des courbes montre que la hauteur des poutres est minimisée par rapport à la hauteur optimale des profilés «parfaits», ce qui conduit au débit exagéré du métal (de 10 à 20 %).

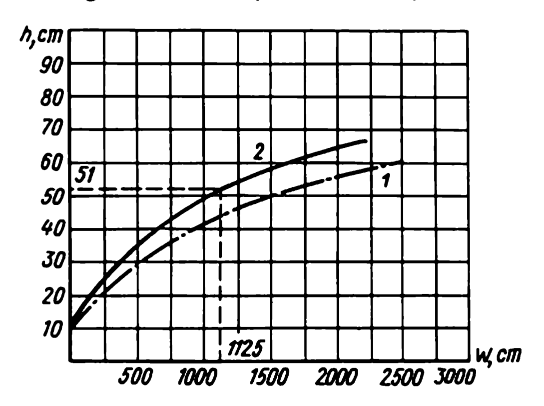


Fig. VII.40

Pour $\alpha = 0$, on tire de (VII.51) la formule approchée

$$h_{opt} = \sqrt[3]{3W_x/(2\beta)}, \qquad \text{(VII.52)}$$

employée, par exemple, pour calculer les poutres soudées.

Si la résistance du matériau de la poutre à la traction est différente de celle à la compression (par exemple, dans le cas de la fonte), la section symétrique par rapport à l'axe neutre cesse d'être économique.

Comparons, par exemple, deux sections d'une poutre en fonte : en H et en T (fig. VII.41).

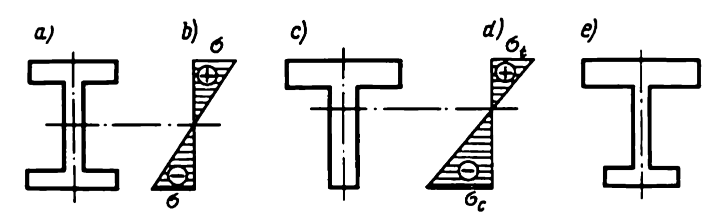


Fig. VII.41

Pour la section en H (fig. VII. 41, *a*, *b*) les contraintes maximales dans les fibres extrêmes sont égales entre elles. Les dimensions de la section sont déterminées par la contrainte admissible à la traction, qui est plus faible que la contrainte admissible à la compression. La contrainte dans la zone comprimée est inférieure à la contrainte admissible. Le matériau n'est pas utilisé dans toute la mesure du possible.

Pour la section en T (fig. VII. 41, *c*), l'axe neutre se déplace dans le sens de l'aile, le diagramme des contraintes est de la forme représentée sur la figure VII.41, *d*. Les contraintes supportées par les fibres extrêmes de l'aile sont plus faibles que celles qui sollicitent les fibres extrêmes de l'âme. En utilisant les poutres de cette forme, il faut donc vérifier la résistance dans deux sections : d'après les moments fléchissants maximaux positif et négatif.

Lorsque le diagramme des moments fléchissants est de même signe, on a le plus d'intérêt de placer l'aile dans la zone étendue et l'âme, dans la zone comprimée. On peut choisir alors les dimensions de l'âme et des ailes telles que les contraintes de traction et de compression soient également admissibles. Dans ce cas, le matériau sera utilisé complètement.

Pour les poutres en fonte, la section encore plus avantageuse suivant le débit du matériau est celle de la figure VII.41, *e*. Dans le calcul, par rapport aux contraintes tangentielles et principales l'épaisseur de l'âme retenue est minimale. Le choix correspondant des dimensions des ailes permet de déplacer de façon nécessaire la ligne nulle, de sorte que les contraintes dans les fibres extrêmes soient égales aux contraintes admissibles à la traction et à la compression.

En choisissant les sections des poutres, il convient de tenir compte que les moments fléchissants varient suivant la longueur. Il vaut mieux, donc, dans des buts d'économie du matériau, d'employer des poutres de section variable (fig. VII.42).

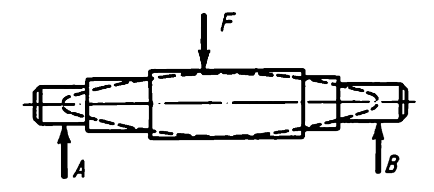


Fig. VII.42

La méthode d'analyse des sections en fonction des avantages qu'elles présentent dans le sens de la résistance peut également être appliquée pour établir les sections à rigidité les plus convenables quant à la section minimale pour le moment d'inertie donné.

Le cadre d'un cours sommaire ne permettant pas de traiter de cette question très importante et intéressante, nous proposons au lecteur de l'explorer lui-même. En particulier, nous recommandons de démontrer que pour une section en H, la hauteur optimale par rapport à la rigidité est donnée par l'équation

$$^2/_3\,\beta h^4_{opt} + {}^{\alpha}/_3\, h_{opt} - 4I_x = 0.$$

Les valeurs de α et β sont celles indiquées dans ce qui précède.

Il est aussi recommandé de calculer la hauteur optimale de la section en T.

Exemple VII.23. Choisir la poutre d'un profilé en H « parfait » pour l'exemple VI.10 (cf. § 53).

Solution. D'après le graphique de la figure VII.40, déterminons h_{opt} suivant le couple de réaction $W_x = 1125 \cdot 10^{-6} m^3$. On obtient $h_{opt} = 51$ cm. L'aire de la section se calcule d'après la formule (VII.50) :

$$A = \frac{2 \cdot 1125 \cdot 10^{-6}}{0,51} + \frac{2}{3} 0,358 \cdot 0,51 + \frac{2}{3} 0,0092 \cdot 0,51^2 = 72,3 \cdot 10^{-4} m^2 = 72,3 \text{ cm}^3.$$

Dans l'exemple VI.10 on a retenu la poutre en H n° 45, dont l'aire de la section $A = 84,7$ cm^2, ce qui est de 17,2 % supérieur à l'aire de la section « parfaite » par rapport à la résistance.

CHAPITRE VIII

HYPOTHÈSES DE LA PLASTICITÉ ET DE LA RUPTURE (HYPOTHÈSES DE LA RÉSISTANCE)

§ 68. Hypothèses de la résistance

Jusque-là nous avons étudié les calculs à la résistance dans les cas d'un matériau soit à l'état de contrainte uniaxial (traction, compression), soit à l'état de contrainte biaxial le plus simple lorsque, en chaque point, les contraintes principales égales en valeur sont de signe opposé (cisaillement, torsion).

Dans ces cas, il n'y avait aucune difficulté à établir les conditions de la résistance. Pour assurer la résistance du matériau, il fallait que la contrainte normale maximale (en traction ou compression) ou la contrainte tangentielle maximale (en torsion) ne dépasse pas la contrainte admissible, dont la valeur est établie d'après la limite d'écoulement ou la charge de rupture (pour les matériaux fragiles) correspondantes, déterminées d'après les expériences.

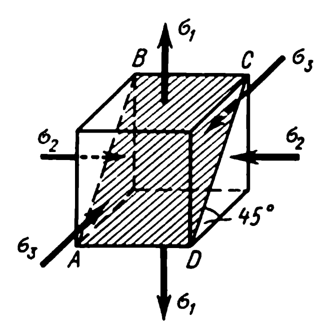


Fig. VIII.1

Dans ce qui suit, en étudiant des déformations plus compliquées telles que la torsion avec flexion, etc., on tombe sur des états de contrainte complexes.

La figure VIII.1 visualise le cas général de l'état de contrainte triaxial. Cette même figure représente l'aire de l'action d'une contrainte tangentielle maximale. Rappelons que nous avons adopté précédemment la règle sui-

vante de la notation des contraintes principales : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (compte tenu du signe).

On voudrait connaître les valeurs des contraintes σ_{1u}, σ_{2u}, σ_{3u} qui donnent lieu à un état limite du matériau, c'est-à-dire entraînent la rupture ou les déformations plastiques.

La résolution de ce problème permettrait également de trancher une autre question, celle de la détermination des valeurs admissibles des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3.

Le problème posé est très compliqué. La méthode la plus sûre pour le résoudre serait de soumettre à l'essai une éprouvette, la relation entre les contraintes principales avant la rupture ou avant le déclenchement de l'écoulement étant donnée, et établir de cette façon les valeurs limites, puis les valeurs admissibles des contraintes principales. Or, son application est impossible du fait qu'il faudrait reprendre les essais à chaque nouvelle combinaison des contraintes. D'autre part, les essais de ce genre imposent l'utilisation des machines et des appareils compliqués. Il faut donc disposer d'une hypothèse (théorie) permettant d'évaluer le danger du passage du matériau de l'état de contrainte complexe à l'état limite sans recourir chaque fois à des expériences compliquées, très laborieuses, et d'utiliser seulement les données des essais les plus simples, c'est-à-dire relatifs à l'état de contrainte uniaxial.

Ainsi, l'établissement des hypothèses de la résistance se fonde sur la prémisse suivant laquelle deux états de contrainte sont considérés comme présentant le même danger et la même résistance si, lors de la croissance des contraintes principales d'un même nombre de fois, ils atteignent simultanément la limite.

Sous les conditions considérées, le coefficient de sécurité des deux états de contrainte est le même.

Il existe plusieurs hypothèses de la résistance et la recherche dans ce domaine se poursuit. Ceci s'explique par la nature complexe du phénomène de la rupture. Du point de vue physique, la rupture du matériau est le détachement des particules les unes des autres (ce qu'on appelle rupture fragile) ou le glissement des particules les unes par rapport aux autres (ce qu'on appelle rupture visqueuse qui s'accompagne des déformations plastiques importantes).

Cependant, la difficulté consiste dans le fait que, sous de différents états de contrainte et dans de différentes conditions de l'essai (température ambiante, vitesse de la déformation, etc.), le même matériau peut subir la rupture aussi bien fragile que visqueuse. Par ailleurs, dans certains cas, il est possible d'observer une rupture combinée lorsque certaines zones de rupture résultent de l'arrachement, et certaines autres, du glissement. Ceci témoigne du fait que le caractère de l'état limite du matériau et les conditions de son passage en cet état dépendent de nombreux facteurs.

Il est naturel de retenir comme tels les contraintes (normales et tangentielles) et les déformations (linéaires et angulaires). On a proposé de prendre comme critère de la transition à l'état limite l'énergie potentielle de la déformation. L'idée de chacune des ***hypothèses de la résistance*** examinées dans ce qui suit consiste à retenir du grand nombre de facteurs qui influent sur la résistance des matériaux l'un de ces facteurs, en ignorant les autres (là et plus loin nous insistons qu'en parlant de la résistance, nous avons en vue aussi bien la rupture au sens littéral, que l'apparition des déformations plastiques).

A mesure que les données d'expérience s'accumulaient, il devenait clair qu'on avait besoin des hypothèses de la résistance plus compliquées qui se fonderaient non seulement sur les essais à la traction (compression) uniaxiale, mais aussi sur les expériences relatives à l'état de contrainte composé.

Une telle ou telle hypothèse de la résistance ne peut être justifiée que par l'expérience. Il faut donc, avant de décrire les hypothèses, s'initier aux résultats de certains essais relatifs à l'état de contrainte biaxial.

Les états de contrainte biaxiaux à diverses relations des contraintes principales s'obtiennent d'une façon relativement simple à l'aide des essais des tubes à parois minces soumis à la pression intérieure et à l'action d'une force axiale.

Représentons les résultats de ces essais sous une forme graphique (fig. VIII.2), en dressant le diagramme des contraintes principales à l'instant de la rupture ou à l'instant du début de l'écoulement du matériau (bref, la courbe de la relation entre les valeurs limites des contraintes principales).

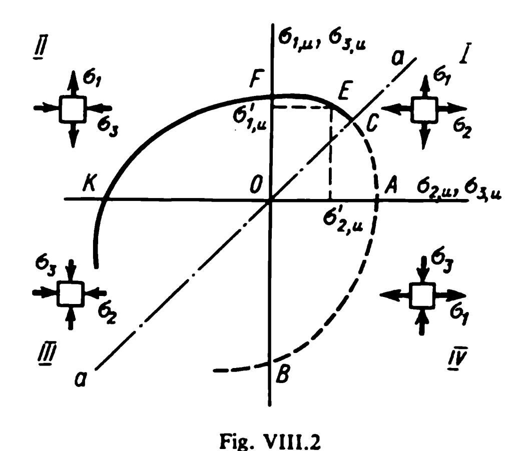


Fig. VIII.2

Alors, dans le cas de la traction uniaxiale, la contrainte limite est donnée par le tronçon *OF* (si l'élément représenté sur le dessin est tendu dans le

sens vertical) ou *OA* (si l'élément subit la traction dans le sens horizontal) ; de plus, pour les matériaux isotropes, $OF = OA$. A une échelle définie, dans le cas de la traction uniaxiale ces tronçons sont égaux à la charge de rupture ou à la limite d'écoulement, suivant l'état limite envisagé *.

Dans le cas de la compression uniaxiale, la contrainte limite est visualisée par le tronçon *OB* ou *OK*.

Soumettons maintenant à l'essai une éprouvette en l'un quelconque état de contrainte biaxial, par exemple, tel que σ_1 en augmentant soit tout le temps deux fois supérieure à σ_2. Certaines valeurs de ces contraintes, par exemple σ'_{1u} et σ'_{2u} provoquent la rupture ou déclenchent l'écoulement du matériau. Portons sur le diagramme le point *E*, dont les coordonnées sont σ'_{1u} et σ'_{2u} . Après avoir réalisé des essais avec d'autres relations entre les contraintes principales, porté sur le diagramme les points correspondants et les ayant reliés entre eux, on obtient une ligne *KFCAB* appelée *diagramme des contraintes limites*. Il est clair que pour des matériaux isotropes la ligne *aa* constitue l'*axe de symétrie* de ce diagramme, de sorte qu'il suffit de dresser la moitié de ce dernier, que ce soit *CEFK* ou *CAB*.

Les points du I^r quadrant du diagramme caractérisent la traction biaxiale ($\sigma_3 = 0$; $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$) ; les points des IIe et IVe quadrants caractérisent la traction-compression biaxiale ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 < 0$) ; les points du IIIe quadrant, la compression biaxiale ($\sigma_2 < 0$; $\sigma_3 < 0$; $\sigma_1 = 0$).

La figure VIII.3 représente le diagramme des contraintes limites d'un matériau fragile qu'est la fonte grise, obtenu par Grassi et Cornet. La composition chimique de la fonte : C, 3,48 % ; Si, 2,21 %; Mn, 0,52 %. L'essai portait sur des tubes en fonte à diamètre extérieur de 14 mm et épaisseur des parois de 0,75 mm. Les tubes subissaient l'action simultanée de la charge axiale et de la pression intérieure.

Le diagramme montre que dans le I^r quadrant la rupture se produit pratiquement sous la contrainte de traction constante de 190 MPa. Dans le IVe quadrant, tant que la deuxième contrainte, maintenant celle de compression, ne dépasse pas 200 MPa, la contrainte de traction reste constante et égale à 190 MPa. Puis elle commence à faiblir, alors que celle de compression croît pour atteindre 630 MPa (charge de rupture à la compression uniaxiale) ; le IIIe quadrant n'a pas été exploré.

La figure VIII.4 représente le diagramme des contraintes limites obtenu par Koffine pour la fonte grise.

---

* En construisant le diagramme considéré, on compromet en partie la règle de notation des contraintes principales. Ainsi, pour le I^r quadrant, dans le cas d'une traction biaxiale quelconque, les abscisses des points sont égales à la valeur limite de la contrainte principale qui agit dans le sens horizontal et qui est notée σ_2 (cf. dans le I^r quadrant l'image de l'élément étendu), bien que pour les points au-dessous de la droite en pointillé *OC*, $\sigma_2 > \sigma_1$, c'est-à-dire qu'en observant rigoureusement la règle de la notation, il faut considérer que la contrainte agissant dans le sens horizontal est la première.

Pour le I^r et le IIe quadrants les résultats sont proches du résultat visualisé sur la figure VIII.3. Les données bien rares sur le IIIe quadrant des contraintes (compression-compression) sont très intéressantes (fig. VIII.4).

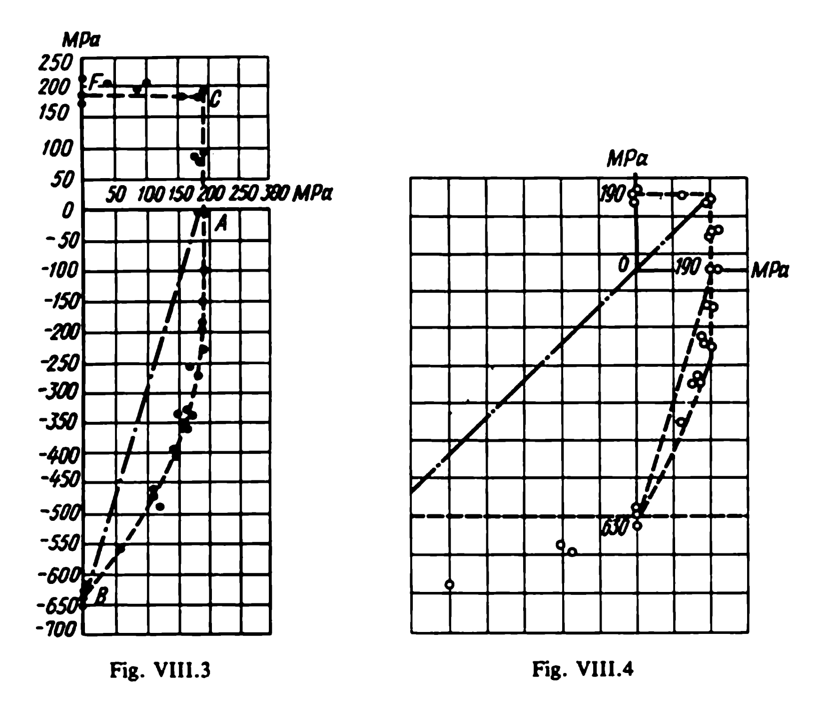


Fig. VIII.3

Fig. VIII.4

La figure VIII.5 donne les diagrammes des contraintes limites pour d'autres matériaux très fragiles : verre (fig. VIII.5, *a*) et gypse (fig. VIII.5, *b*). Ces diagrammes sont obtenus d'après les expériences de l'académicien N. Davidenkov.

Les éprouvettes de verre étaient des tubes à diamètre intérieur de 35 mm et à épaisseur des parois de 1 mm, longues de 220 mm. Les éprouvettes de gypse étaient moulées en gypse médicinal également sous la forme des tubes de diamètre intérieur de 39,5 mm et d'épaisseur des parois de 3 mm. Pour le verre, la puissance insuffisante du dispositif n'a pas permis d'établir les points intermédiaires entre $\sigma_3 = -300$ MPa et $\sigma_3 = -875$ MPa.

La figure VIII.5, *a* montre que, pour le verre, jusqu'à $\sigma_3 = -300$ MPa le rôle décisif appartient à la contrainte de traction $\sigma_1 = +40$ MPa ; pour le gypse, jusqu'à la contrainte $\sigma_3 = -12$ MPa, le rôle déterminant appartient également à la contrainte de traction $\sigma_1 = +4$ MPa. Le IIIe quadrant (c'est-à-dire le cas de compression biaxiale) n'a pas été exploré.

La figure VIII.6 visualise les résultats des essais avec l'acier et le cuivre appartenant au groupe des matériaux plastiques. Là on a porté sur les axes des coordonnées non pas les valeurs absolues des contraintes limites, mais

leur rapport à la limite d'écoulement en traction (compression) uniaxiale. Ce diagramme montre que les points expérimentaux reposent suivant une certaine courbe *CKADB*. Ceci témoigne du fait qu'à la différence de diagrammes précédents, aucune des contraintes ne joue ici de rôle déterminant.

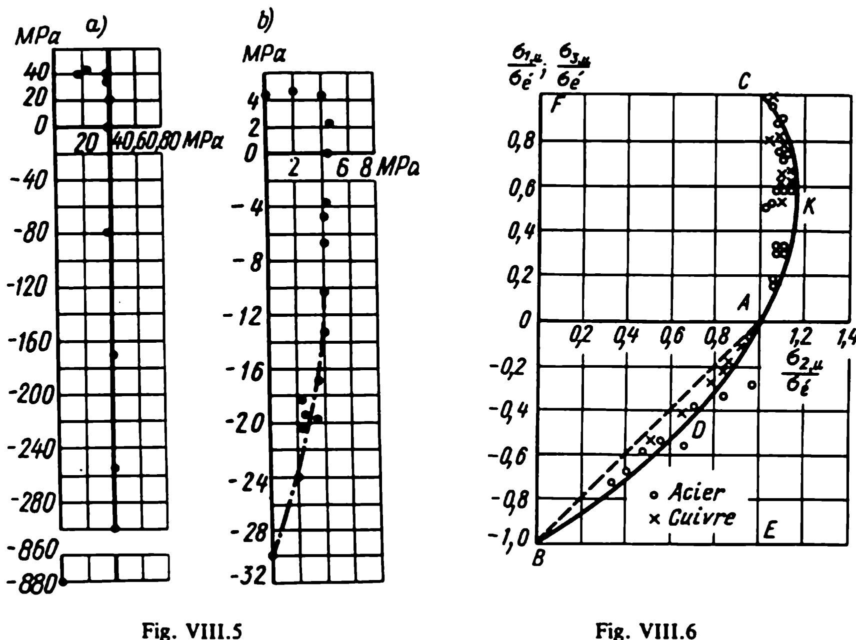


Fig. VIII.5

Fig. VIII.6

Pour l'état de contrainte triaxial, les données empiriques sont bien moins nombreuses que pour celui de l'état de contrainte plan. Les essais dans ce domaine ne sont réalisés que pour un certain nombre de combinaisons des contraintes principales.

Passons maintenant à l'exposé des hypothèses fondamentales de la résistance. Certaines d'entre elles sont confirmées par des essais soit comme hypothèses de la rupture, soit comme hypothèses de la plasticité.

§ 69. Première hypothèse de la résistance

Elle s'appelle également *hypothèse des contraintes normales maximales* du fait que ces contraintes sont à la base de son critère de la résistance. On peut l'énoncer de la façon suivante : *l'état limite du matériau en état de contrainte composé survient lorsque dans le cas de l'état de contrainte uniaxial la contrainte normale maximale atteint la valeur de la contrainte limite* :

$$\sigma_{1u} = \sigma_u , \tag{VIII.1}$$

où σ_{1u} est la valeur limite de la contrainte normale la plus grande des trois contraintes (à l'instant de la rupture) ; σ_u, la contrainte limite à la compression ou à la traction uniaxiales (charge de rupture).

Le diagramme des contraintes limites dressé d'après la première hypothèse est représenté sur la figure VIII.7, *a* sous la forme des droites *12, 23, 34* et *14*. De plus, les tronçons $OA = OF$ traduisent la contrainte limite à la traction uniaxiale, les tronçons $OB = OK$, la contrainte limite à la compression uniaxiale. Pour les matériaux fragiles $OB > OF$; pour les matériaux plastiques, $OB = OF$ (fig. VIII.7, *b*). En divisant les deux membres

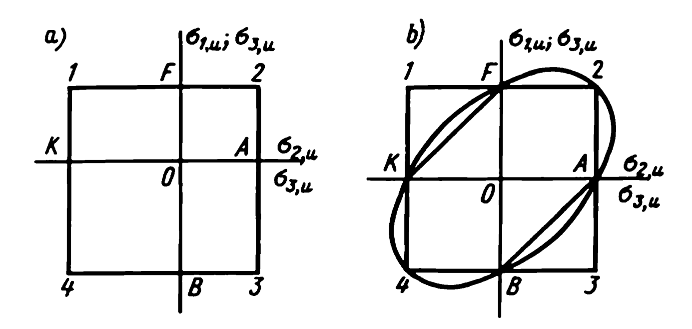


Fig. VIII.7

de l'égalité (VIII.1) par le coefficient de sécurité et en ajoutant le signe d'inégalité, on obtient la condition de la résistance :

$$\sigma_1 \leqslant \sigma_{adm}, \qquad \text{(VIII.2)}$$

où σ_1 est la valeur réelle de la contrainte principale maximale subie par le point dangereux de la pièce ; σ_{adm}, la valeur de la contrainte normale admissible adoptée pour la traction ou la compression uniaxiales.

Compte tenu de l'expression (VIII.2), la première hypothèse de la résistance peut être énoncée de la façon suivante : *à l'état de contrainte composé, la résistance du matériau est assurée si la contrainte normale maximale ne dépasse pas la contrainte normale admissible établie pour l'état de contrainte uniaxial.*

On voit que cette hypothèse tient compte seulement de la contrainte principale maximale, en négligeant l'influence sur la résistance des matériaux des deux autres contraintes principales. Pour les matériaux plastiques les essais passés en revue plus haut ne confirment pas cette hypothèse en tant qu'hypothèse de plasticité, c'est-à-dire une hypothèse qui établit le critère du déclenchement de l'écoulement (cf. fig. VIII.6). Les points expérimentaux reposent non pas sur les droites *FC, CE* et *BE,* comme ils le devraient d'après la première hypothèse, mais sur une certaine courbe *CKADB*.

Pour les matériaux fragiles, dans le Ir quadrant du diagramme et dans une partie notable du IVe (ou du IIe), la première hypothèse s'accorde bien avec les données d'expérience (cf. fig. VIII.3 à VIII.5). Ce sont les cas où il convient justement de l'utiliser en l'envisageant comme une hypothèse établissant le critère de la rupture fragile.

Si les contraintes admissibles du matériau à la traction et à la compression sont différentes, au lieu de la condition de la résistance (VIII.2) on a deux conditions, celles des contraintes maximales à la traction et à la compression :

$$\max \sigma_t \leqslant \sigma^t_{adm}; \qquad \text{(VIII.2a)}$$

$$\max \sigma_c \leqslant \sigma^c_{adm}. \qquad \text{(VIII.2b)}$$

§ 70. Deuxième et troisième hypothèses de la résistance

D'après la deuxième hypothèse appelée également *hypothèse des déformations linéaires maximales*, on adopte comme critère de la résistance la plus grande déformation linéaire.

Les essais ne confirmant pas cette hypothèse, nous ne l'exposerons pas et passerons à la description de la troisième hypothèse appliquée actuellement à une large échelle.

D'après cette dernière, appelée également *hypothèse des contraintes tangentielles maximales, la résistance du matériau à l'état de contrainte composé est assurée, si pour l'état de contrainte uniaxial, la contrainte tangentielle maximale ne dépasse pas la contrainte tangentielle admissible*

$$\tau_{max} \leqslant \tau_{adm}. \qquad \text{(VIII.3)}$$

Au §15 nous avons montré qu'à l'état de contrainte biaxial les contraintes tangentielles maximales interviennent dans les sections sous un angle $\alpha = 45°$ par rapport à la direction des contraintes principales et sont égales à la demi-différence de ces contraintes.

Dans le cas de l'état de contrainte volumique, les contraintes tangentielles maximales ont lieu dans le plan $ABCD$ (cf. fig. VIII.1)

$$\tau'_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2.$$

A l'état de contrainte uniaxial la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} est liée à la contrainte normale admissible σ_{adm} par la relation $\tau_{adm} = \frac{1}{2}\sigma_{adm}$, qui se déduit de la formule précédente en y annulant σ_3. Ainsi, d'après la troisième hypothèse, la condition de la résistance exprimée en contraintes normales est de la forme

$$\sigma_{réd} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_{adm}. \qquad \text{(VIII.4)}$$

L'expression du premier membre de l'inégalité (VIII.4) est une certaine contrainte dite *réduite* ou *équivalente* (ou, encore, *de calcul*).

Il faut l'entendre comme la *contrainte qu'il faut produire dans une éprouvette tendue ou comprimée pour que sa résistance soit la même que la résistance de l'éprouvette qui se trouve à l'état de contrainte composée.*

Pour comparer cette hypothèse avec les données empiriques écrivons aussi d'après la troisième hypothèse la condition du passage du matériau à l'état limite

$$\sigma_{1u} - \sigma_{3u} = \sigma_u , \qquad \text{(VIII.5)}$$

où σ_{1u} et σ_{3u} sont les valeurs des contraintes principales à l'état limite ; σ_u, la contrainte limite à la traction ou à la compression uniaxiales.

Représentons la condition (VIII.5) sur le diagramme des contraintes limites. En traction biaxiale la contrainte minimale σ_3 est nulle, donc, dans les I[r] et III[e] quadrants la troisième hypothèse se confond avec la première : les lignes *F2, 2A*; *K4* et *4B* (cf. fig. VIII.7, *b).*

Dans le II[e] quadrant l'équation (VIII.5) est l'équation de la ligne *KF* inclinée sous un angle de 45° (cf. fig. VIII.7, *b*). Dans le IV[e] quadrant la ligne *KF* correspond à la ligne *AB*.

En comparant le diagramme des contraintes limites établi d'après la troisième hypothèse (droites *CA* et *AB* de la figure VIII.6) avec les résultats des essais des matériaux plastiques, on voit que cette hypothèse définit en général assez bien la résistance de ces matériaux aux déformations plastiques, de toute façon bien mieux que la première hypothèse (lignes *CE* et *BE*).

Pour le cas de cisaillement pur (torsion), lorsque $\sigma_1 = \tau$ et $\sigma_3 = -\tau$, on obtient d'après la formule (VIII.5) :

$$2\tau_{\acute{e}} = \sigma_{\acute{e}} \qquad \text{ou} \qquad \tau_{\acute{e}} = 0{,}5\,\sigma_{\acute{e}} ,$$

où $\tau_{\acute{e}}$ est la limite d'écoulement au cisaillement pur ; $\sigma_{\acute{e}}$, la limite d'écoulement à la traction (compression) uniaxiale.

Pour la plupart des aciers les essais donnent $\tau_{\acute{e}} \approx 0{,}6\,\sigma_{\acute{e}}$.

L'inconvénient de la troisième hypothèse est qu'elle ne rend pas compte de l'influence de la contrainte principale intermédiaire σ_2 sur la résistance du matériau.

Actuellement, la troisième hypothèse de la résistance est largement utilisée pour les matériaux plastiques qui ont la même résistance à la traction et à la compression.

§ 71. Hypothèses énergétiques de la résistance

D'après la première des hypothèses énergétiques, celle de Beltrami, la *résistance des matériaux à l'état de contrainte composé est assurée lorsque l'énergie potentielle spécifique des déformations ne dépasse pas l'énergie*

potentielle spécifique admissible établie pour l'état de contrainte uniaxial

$$u \leqslant u_{adm}. \qquad \text{(VIII.6)}$$

Dans le cas de l'état de contrainte volumique l'énergie potentielle spécifique de la déformation s'écrit (cf. §18) :

$$u = 0{,}5E\,[\sigma_1^2 + \sigma_2^3 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \qquad \text{(VIII.7)}$$

Cette quantité est toujours positive. C'est pourquoi l'hypothèse énergétique, tout comme la troisième hypothèse, ne rend pas compte de la différence entre la traction et la compression ; autrement dit, en appliquant cette hypothèse, il faut adopter

$$\sigma_{adm}^{t} = \sigma_{adm}^{c} = \sigma_{adm}.$$

Avec $\sigma_1 = \sigma_{adm}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ dans le cas de l'état de contrainte uniaxial l'énergie potentielle spécifique admissible est également déterminée par la formule (VIII.7) :

$$u_{adm} = \sigma_{adm}^2/(2E). \qquad \text{(VIII.8)}$$

En portant la valeur de u tirée de la formule (VIII.7) et de u_{adm} de (VIII.8) dans la formule (VIII.6), on obtient

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leqslant \sigma_{adm}^2$$

ou

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad \text{(VIII.9)}$$

Les essais montrent que les meilleurs résultats s'obtiennent si on retient comme critère de la résistance non pas toute l'énergie de la déformation, mais seulement celle de ses parties qui est associée au changement de la forme du corps. Il est le plus simple d'écrire cette condition en admettant dans la formule (VIII.9) que $\nu = 0{,}5$, puisque pour cette valeur de ν le volume du corps ne change pas (cf. §17).

Par conséquent, d'après l'hypothèse énergétique du changement de forme appelée également *quatrième hypothèse* ou hypothèse de Hubert-Mizes la condition de la résistance (dans notre cas c'est la condition de la plasticité) est de la forme

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad \text{(VIII.10)}$$

Dans le cas particulier de l'état de contrainte plan ($\sigma_3 = 0$), on a

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Pour comparer avec les données empiriques, écrivons d'après cette hypothèse la condition limite de l'état de contrainte plan :

$$\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 - \sigma_{1u}\sigma_{2u} = \sigma_u^2, \qquad \text{(VIII.12)}$$

où σ_{1u} et σ_{2u} sont les valeurs limites des contraintes principales ; σ_u, la valeur limite des contraintes à la traction (compression) uniaxiale.

Sur le diagramme des contraintes limites à cette équation correspond une ellipse (cf. fig. VIII.7, *b*). En comparant la condition de plasticité définie par la quatrième hypothèse (ligne *CKADB* de la figure VIII.6) avec les données empiriques, on établit que leur coïncidence est très bonne. Pour le cas du cisaillement pur, on obtient de (VIII.12) que $3\tau_{\acute{e}}^2 = \sigma_{\acute{e}}$; d'où $\tau_{\acute{e}} \approx 0{,}58\ \sigma_{\acute{e}}$, ce qui coïncide bien avec les données empiriques.

Pour les matériaux fragiles les résultats obtenus avec la quatrième hypothèse ne sont pas satisfaisants.

§ 72. Généralités sur les autres hypothèses de la résistance

Les hypothèses passées en revue donnent des résultats qui conviennent seulement soit pour la rupture fragile (première hypothèse), soit pour l'état visqueux (troisième et quatrième hypothèses). D'autre part, elles ne rendent pas compte de la différence entre la résistance des matériaux à la traction et à la compression.

En plus des hypothèses examinées, on a proposé bien d'autres encore. Certaines d'entre elles, tout en présentant de l'intérêt, ne peuvent pas être examinées dans notre cours. Il faut signaler en premier lieu l'hypothèse de Mohr qui permet de prendre en compte la différence entre la résistance des matériaux à la traction et à la compression. D'après cette hypothèse, la condition de la résistance s'écrit :

$$\sigma_{\text{réd}} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leqslant \sigma_{\text{adm}}^t, \qquad \text{(VIII.13)}$$

où $m = \sigma_{u,t}/\sigma_{u,c}$; $\sigma_{u,t}$ est la contrainte limite à la traction ; $\sigma_{u,c}$, la contrainte limite à la compression.

Pour les matériaux plastiques les contraintes limites sont égales aux limites d'écoulement correspondentes : $\sigma_{u,t} = \sigma_{\acute{e},t}$; $\sigma_{u,c} = \sigma_{\acute{e},c}$.

Pour les matériaux fragiles les contraintes limites sont égales à la charge de rupture.

Ainsi, l'hypothèse de Mohr peut être envisagée aussi bien comme une hypothèse de la plasticité que de la rupture.

Pour $m = 1$, l'hypothèse de la résistance de Mohr coïncide avec la troisième hypothèse. Sur le diagramme des contraintes limites, dans le I^r quadrant l'hypothèse de Mohr coïncide avec la première et la troisième hypothèses de la résistance (lignes *FC* et *CA* de la figure VIII.3), et dans le IVe

quadrant, elle traduit la relation entre les valeurs limites des contraintes σ_{1u} et σ_{3u} sous la forme de la droite AB. On voit que les résultats fournis par l'hypothèse de Mohr dans le cas des matériaux fragiles conviennent bien tout en exagérant en définitive les dimensions des sections. Les résultats obtenus d'après la théorie de Mohr sont les meilleurs avec $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_3 < 0$.

La généralisation de l'hypothèse énergétique proposée par P. Balandine présente aussi de l'intérêt et permet de tenir compte de la différence entre la résistance à la traction et à la compression. D'après Balandine, la condition de la résistance est de la forme

$$\sigma_{\text{réd}} = \frac{1-m}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\sqrt{(1-m)^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 + 4m[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]} \leqslant \sigma'_{\text{adm}},$$

où $m = \sigma_{u,t}/\sigma_{u,c}$.

Pour l'état de contrainte biaxial, avec $\sigma_3 = 0$, on a

$$\sigma_{\text{réd}} = \frac{1-m}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(1-m)^2(\sigma_1+\sigma_2)^2 + 4m(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)} \leqslant \sigma'_{\text{adm}}.$$

Pour les matériaux de même résistance à la traction et à la compression, c'est-à-dire pour $m = 1$, la théorie de Balandine coïncide avec la quatrième hypothèse. Les expériences montrent que dans une marge définie des états de contrainte l'hypothèse de Balandine donne de bons résultats. Ainsi, dans le cas de la fonte, elle peut être appliquée à la deuxième partie du IVe quadrant des contraintes (cf. fig.VIII.3) lorsque la contrainte de compression devient égale à celle de traction, ainsi que, vraisemblablement, au IIIe quadrant, bien que les données empiriques sur le IIIe quadrant sont encore insuffisantes.

Les *hypothèses de la résistance généralisées* ces derniers temps méritent également l'attention ; leur critère de la résistance est établi non pas d'après un, mais d'après deux et même trois facteurs. Le professeur Y. Friedman a proposé de réunir la deuxième et la troisième hypothèses. N. Davidenkov, de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., a proposé en se fondant sur des expériences avec la fonte, le verre et le gypse décrites dans ce qui précède, de réunir la première hypothèse avec celle de Balandine.

Par exemple, pour la fonte, la première hypothèse doit être appliquée au I^r^ quadrant des contraintes et à la première partie du IVe quadrant, tant que la contrainte de compression ne dépasse pas celle de la traction. A la partie restante du IVe (ou du IIe) quadrant, ainsi qu'au IIIe quadrant des

contraintes, on peut appliquer, d'après Davidenkov, l'hypothèse de la résistance de Balandine.

On a avancé encore d'autres hypothèses. Le professeur M. Filonenko-Boroditch a proposé d'écrire la condition de la résistance sous la forme d'un polynôme du deuxième et même du troisième degré par rapport aux contraintes principales, où figure un nombre défini de constantes arbitraires déterminées à partir des essais, y compris des essais à l'état de contrainte composé. Pourtant, les diagrammes de rupture des matériaux fragiles donnés précédemment montrent clairement que dans toute la plage des états de contrainte la condition de la résistance du matériau ne peut pas être exprimée par une fonction continue.

Pour les matériaux fragiles la plus justifiée est probablement la théorie de Davidenkov.

Nous avons examiné les hypothèses de la résistance en nous fondant sur les données fournies par les expériences avec l'état de contrainte biaxial. Les données empiriques relatives aux états de contrainte triaxiaux sont bien plus pauvres. Les renseignements disponibles témoignent du fait qu'aux états de contrainte proches de la compression triaxiale les matériaux même fragiles sont capables de résister aux efforts très importants. Dans le cas où la compression appliquée de tous les côtés est d'une valeur identique pour les matériaux tels que l'acier, le cuivre, l'aluminium la rupture ne survient qu'à des pressions énormes atteignant 5000 à 20 000 MPa.

Les données empiriques disponibles permettent d'admettre que pour les matériaux plastiques soumis à l'état de contrainte triaxial des résultats satisfaisants sont donnés par l'hypothèse énergétique du changement de forme et la troisième hypothèse de la résistance. Pour ce qui est des matériaux fragiles, on recommande d'appliquer l'hypothèse de la résistance de Mohr.

Exemple VIII.1. Vérifier la résistance du matériau (acier 20) soumis à la compression triaxiale ; $\sigma_3 = -500$ MPa ; $\sigma_2 = -400$ MPa ; $\sigma_1 = -400$ MPa ; $\sigma^t_{adm} = 160$ MPa.

Solution. D'après l'hypothèse énergétique de changement de forme, la contrainte équivalente vaut (cf. la formule VIII.10)

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_2\sigma_1 - \sigma_2\sigma_3} =$$

$$= \sqrt{500^2 + 400^2 + 400^2 - 500 \cdot 400 - 400 \cdot 400 - 400 \cdot 500} =$$

$$= 100 \text{ MPa} < 160 \text{ MPa}.$$

Il est curieux de noter que d'après la première hypothèse de la résistance, qui dans notre cas est inapplicable, on aurait obtenu $\sigma_{réd} = 500$ MPa, c'est-à-dire bien plus.

Exemple VIII.2. Vérifier la résistance d'une pièce en fonte dont l'état de contrainte au point dangereux est visualisé sur la figure VIII.8. La contrainte admissible est $\sigma^t_{adm} = 35$ MPa ; $m = 0,29$.

Solution. L'état de contrainte n'étant pas donné en contraintes principales, calculons d'abord celles-ci en utilisant les formules du §16 :

$$\sigma_1 = \sigma/2 + 0{,}5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 10/2 + 0{,}5\sqrt{10^2 + 4 \cdot 20^2} = 5 + 20{,}6 = 25{,}6 \text{ MPa};$$

$$\sigma_3 = \sigma/2 - 0{,}5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 5 - 20{,}6 = -15{,}6 \text{ MPa}.$$

La contrainte de traction dépassant en valeur absolue celle de compression, en vertu de l'hypothèse généralisée de Davidenkov cet état de contrainte impose l'application de l'hypo-

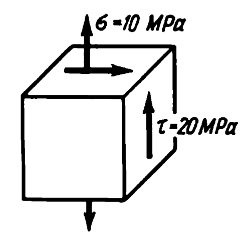


Fig. VIII.8

thèse des contraintes normales maximales

$$\sigma_{réd} = 25{,}6 \text{ MPa} < 35 \text{ MPa}.$$

L'hypothèse de Mohr donnerait $\sigma_{réd} = 25{,}6 - 0{,}29(-15{,}6) = 30{,}1 < 35$ MPa, c'est-àdire une évaluation plus prudente.

Exemple VIII.3. Calculer le coefficient de sécurité d'une pièce en fonte si au point dangereux les contraintes principales sont : $\sigma_1 = 25$ MPa ; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -50$ MPa. La charge de rupture de la fonte à la traction $\sigma_{u,t} = 160$ MPa ; à la compression : $\sigma_{u,c} = 550$ MPa ; $m = 0{,}29$.

Solution. La contrainte de compression dépassant en valeur celle de traction, calculons en vertu de l'hypothèse de la résistance de Balandine la contrainte équivalente :

$$\sigma_{réd} = \frac{1 - m}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - m)^2(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4m(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3)} =$$

$$= \frac{1 - 0{,}29}{2}(25 - 50) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{(1 - 0{,}29)^2(25 - 50)^2 + 4 \cdot 0{,}29(25^2 + 50^2 + 25 \cdot 50)} = 27{,}65 \text{ MPa}.$$

Le coefficient de sécurité $n = 160/27{,}65 = 5{,}8$.

A titre de comparaison, calculons le coefficient de sécurité d'après l'hypothèse de Mohr :

$$\sigma_{réd} = \sigma_1 - m\sigma_3 = 25 + 0{,}29 \cdot 50 = 39{,}5 \text{ MPa} ;$$

$$n = 160/39{,}5 = 4{,}06,$$

c'est-à-dire encore une évaluation plus prudente.

Ainsi, l'application des hypothèses de la résistance généralisées permet de choisir d'une façon plus économique les dimensions des pièces en matériaux fragiles. Cependant, compte tenu des données empiriques insuffisantes sur la résistance des matériaux et l'état de contrainte composé il est recommandé d'utiliser l'hypothèse de Mohr.

Exemple VIII.4. Evaluer la probabilité des déformations plastiques sous l'effet de contact d'une sphère et d'une plaque en acier 30 si la contrainte de contact maixmale $\sigma_{max} = 1200$ MPa, c'est-à-dire égale à la contrainte de contact admissible (cf. le tableau II.6).

Solution. En appliquant la troisième hypothèse de la plasticité écrivons les conditions du passage du matériau à l'état plastique :

$$\tau_{max} = \tau_é = \sigma_é/2 = 300/2 = 150 \text{ MPa},$$

où $\tau_é$ = 150 MPa est la limite d'écoulement de l'acier 30 sous des contraintes tangentielles.

La formule (II.64) amène pour les points situés en profondeur de la plaque (à la distance égale à peu près à la moitié du rayon de l'aire de contact) :

$$\tau_{max} = 0{,}31 \cdot \sigma_{max} = 0{,}31 \cdot 1200 = 372 \text{ MPa}.$$

Puisque $\tau_{max} > 150$ MPa, on en tire que pour la valeur donnée de la contrainte de contact les déformations plastiques sont inévitables, surtout en profondeur de la plaque, et ne sont admissibles que sous l'action d'une charge statique.

CHAPITRE IX

CAS GÉNÉRAL DE L'ACTION DES FORCES SUR UNE BARRE (RÉSISTANCE COMPOSÉE)

§ 73. Généralités

Nous avons examiné quatre formes de sollicitation simple d'une barre que sont la traction (compression) centrale, le cisaillement, la torsion ou la flexion plane. Les sections droites de la barre subissaient toujours sous l'action de la charge un seul effort intérieur (effort normal ou tranchant, moment de torsion ou moment fléchissant). Il n'y avait d'exception que pour le cas général de la flexion plane (simple), lorsque les sections droites de la barre sont simultanément soumises à deux efforts intérieurs, le moment fléchissant et l'effort tranchant. Mais là aussi on prenait en compte dans les calculs à la résistance et à la rigidité seulement l'effort intérieur, d'habitude le moment fléchissant.

Or, dans la pratique on tombe souvent sur des cas plus compliqués, lorsque la barre est sollicitée dans ses sections droites par plusieurs facteurs de force internes (efforts intérieurs), et le calcul à la résistance doit rendre compte de leur action simultanée, par exemple, de celle de l'effort tranchant et du moment de torsion, ou de la combinaison de trois et plus efforts intérieurs. Ces cas s'appellent *résistance composée.*

L'ordre de résolution de tels problèmes est le suivant.

On détermine d'abord par la méthode des sections les facteurs de force intérieurs subis par les sections droites.

Pour une charge composée, il est recommandé de construire les diagrammes des efforts intérieurs, qui permettent de déterminer la position de la section dangereuse*. Ensuite, sur la base du principe de l'indépendance de l'effet des forces, on détermine les contraintes normales et tangentielles pour chaque effort intérieur séparément, en utilisant les formules obtenues dans les chapitres précédents. En explorant la distribution des contraintes suivant la section on établit le point dangereux (ou supposé tel) pour lequel on compose la condition de la résistance. S'il s'avère que le point dange-

* Il arrive qu'il soit impossible d'après les diagrammes des efforts intérieurs de se faire une idée bien sûre de la section dangereuse ; on établit alors deux (et parfois plus) sections présentant un danger éventuel et on réalise le calcul pour chacune d'elles.

reux est le siège d'un état de contrainte uniaxial (traction ou compression uniaxiale), il suffit pour le calcul à la résistance de comparer la contrainte normale globale (c'est-à-dire résultante de tous les efforts intérieurs) en ce point, à la contrainte admissible en traction ou en compression. Mais si au point dangereux l'état de contrainte est biaxial *, il faut appliquer telle ou telle hypothèse de la résistance. On sait de l'exposé précédent que le choix de ces hypothèses est déterminé en premier lieu par l'état du matériau (plastique ou fragile).

Lorsqu'il faut déterminer tel ou tel déplacement, on recourt également au principe de l'indépendance de l'effet des forces (les déplacements sont additionnés géométriquement).

§ 74. Exemples de la construction des diagrammes des efforts intérieurs pour une barre à axe coudé

Considérons l'exemple de la construction des diagrammes des moments de torsion et fléchissants, ainsi que des efforts normaux pour la barre représentée sur la figure IX.1, *a* sur laquelle est représenté également le système de coordonnées.

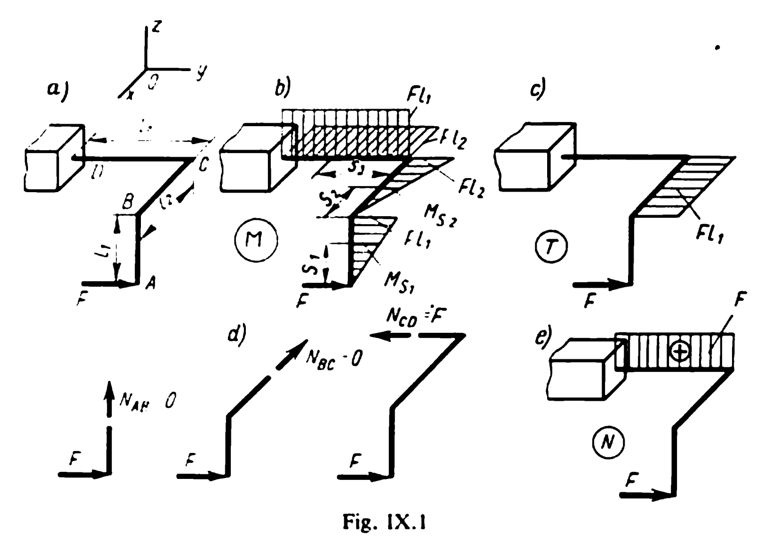


Fig. IX.1

Le moment fléchissant en une section quelconque de la barre est déterminé comme la somme algébrique des moments (par rapport à l'axe correspondant) des forces extérieures appliquées d'un côté de la section. Pour ne pas calculer au préalable les réactions de l'encastrement, il est recommandé

* Dans la résistance des matériaux le cas de l'état de contrainte triaxial ne se présente pas.

de prendre la somme des moments des forces subies du côté de l'extrémité libre de la barre.

Dans une section arbitraire du tronçon AB le moment fléchissant est $Ms_1 = Fs_1^*$ (fig. IX.1, *b*). Le diagramme de M du tronçon AB est construit d'après cette équation du côté droit de la barre (sur la fibre comprimée).

Pour calculer les moments fléchissants dans les sections du tronçon BC il est utile de transposer en pensée la force F parallèlement à elle-même du point A en point B. A cet effet, il faut ajouter un moment reposant dans le plan du dessin, c'est-à-dire dans le plan ZOY, et égal à $M_{yz} = Fl_1$. Le plan de ce moment étant perpendiculaire à l'axe du tronçon BC de la barre, il tord cette dernière, alors que la flexion est produite par la force F. C'est pourquoi le moment fléchissant dans la section d'abscisse s_2 vaut $Ms_2 = Fs_2$.

Les fibres comprimées du tronçon BC se trouvent à droite, là où est construit le diagramme de Ms_2 à ordonnée maximale Fl_2. D'une façon analogue, on dresse le diagramme des moments fléchissants du tronçon CD. A cet effet, la force F et le moment $M_{yz} = Fl_1$ sont reportés en pensée du point B en point C.

Le point C subit la force F dirigée le long du tronçon CD et deux moments : $M_{yz} = Fl_1$ transposé sans changer, et $M_{xy} = Fl_2$ obtenu en transposant la force F du point B en point C.

Ces deux moments M_{yz} et M_{xy} (ils ne sont pas représentés sur le dessin) provoquent la flexion : le premier dans le plan vertical, et le deuxième, dans le plan horizontal.

Les diagrammes correspondants des moments fléchissants du tronçon CD sont représentés sur la figure IX.1, *b*. Ces diagrammes sont construits du côté des fibres comprimées du tronçon envisagé.

Dressons le diagramme des moments de torsion. Dans le tronçon AB la barre ne subit pas la torsion, la force F reposant dans le même plan que l'axe longitudinal du tronçon AB.

Dans les sections du tronçon BC le moment de torsion $T = M_{yz} = Fl_1$. Le diagramme de T peut se construire de n'importe quel côté de la barre (fig. IX.1, *c*).

Le tronçon CD ne subit pas de torsion du fait que la force F est parallèle à son axe.

Construisons le diagramme des efforts normaux. La condition d'équilibre des parties rejetées permet d'obtenir en projetant les forces sur la direction des axes des tronçons isolés de la barre (fig. IX.1, *d*) :

$$N_{AB} = 0 ; \quad N_{BC} = 0 ; \quad N_{CD} = F \quad \text{(traction)}.$$

---

* Les distances entre l'une des extrémités du tronçon donné de la barre et la section envisagée sont notées respectivement s_1, s_2, s_3.

Le diagramme de N est représenté sur la figure IX.1, *e*.

L'étude des diagrammes montre que 1) le tronçon AB ne travaille qu'à la flexion; 2) le tronçon BC est sollicité à la torsion et à la flexion dans le plan horizontal ; 3) le tronçon CD subit la flexion dans deux plans et la traction.

Les calculs de la résistance de chaque tronçon doivent être réalisés conformément à ce qui vient d'être exposé.

§ 75. Flexion dans deux plans (flexion déviée)

La flexion déviée apparaît lorsque les forces extérieures perpendiculaires à l'axe de la barre ne reposent pas dans le plan passant par l'axe principal de la section droite (fig. IX.2). Dans ce cas, le moment fléchissant

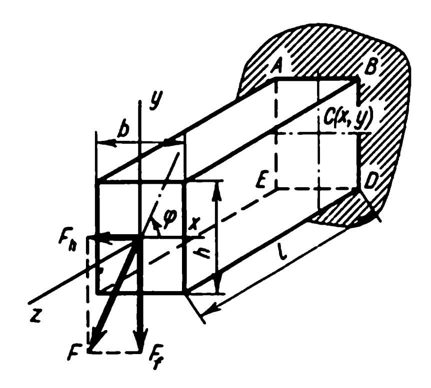


Fig. IX.2

engendré dans la section peut être décomposé en deux moments qui agissent dans les plans passant par les axes principaux de la section. Ainsi, la flexion déviée peut être envisagée comme la combinaison de deux flexions simples dans des plans respectivement perpendiculaires.

En flexion déviée, les contraintes normales en un point de la section droite sont égales à la somme algébrique des contraintes dues à la flexion dans les deux plans.

Considérons, par exemple, le point C de la section d'appui dont les coordonnées par rapport aux axes principaux sont x et y. Dans cette section :

a) le moment fléchissant subi par la section de la barre dans le plan vertical d'axe neutre x :

$$M_x = F_v l = Fl \sin \varphi \; ; \tag{a}$$

b) le moment fléchissant subi par la section de la barre dans le plan horizontal d'axe neutre y :

$$M_y = F_h l = Fl \cos \varphi . \tag{b}$$

Ici F_v et F_h sont les composantes verticale et horizontale de la force F ; l, la longueur de la poutre ; φ, l'angle d'inclinaison du plan de force par rapport à l'axe x.

En flexion dans le plan vertical la moitié supérieure de la poutre (y compris le point C) subit des contraintes de traction, et la moitié inférieure, des contraintes de compression, du fait que la partie convexe de la poutre est orientée en haut.

Au point C les contraintes se calculent suivant la formule connue de la théorie de la flexion simple :

$$\sigma_1 = M_x y / I_x,$$

où y est la distance de l'axe neutre x au point C ; I_x, le moment d'inertie de la section droite de la poutre par rapport à l'axe x.

La flexion dans le plan horizontal engendre dans la moitié droite de la poutre, et donc en C, des contraintes de traction, et dans la moitié gauche, des contraintes de compression, de façon que la flexion dans le plan horizontal pousse le côté convexe de la poutre à droite. Pour s'en convaincre, il suffit de fléchir dans le plan horizontal une règle flexible.

Les contraintes supportées par le point C se calculent d'après la formule analogue

$$\sigma_2 = M_y x / I_y,$$

où x est la distance entre l'axe y (axe neutre en flexion dans le plan horizontal) et le point C ; I_y, le moment d'inertie de la section droite de la poutre par rapport à l'axe y.

La contrainte globale en C :

$$\sigma = M_x y / I_x + M_y x / I_y. \qquad \text{(IX.1)}$$

Cette formule est justifiée pour toute autre section de la poutre.

Si la section comporte des points angulaires en saillie tels que x_{max} et y_{max} sont atteints simultanément (rectangle, section en H), en ces points apparaît la contrainte maximale en valeur

$$\sigma = \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y, \qquad \text{[IX.2]}$$

où $W_x = 2I_x/h$ est le moment de résistance de la section par rapport à l'axe x ; $W_y = 2I_y/b$, le moment de résistance de la section par rapport à l'axe y.

Il est clair que les points présentant un danger sont les points angulaires de la section où sont sommées les contraintes de même signe. Pour le cas représenté sur la figure IX.2 ces points sont B et E, le point B reposant dans la zone tendue et le point E, dans la zone comprimée. Les contraintes en ces points sont donc :

$$\sigma_B = M_x/W_x + M_y/W_y ; \qquad \sigma_E = -M_x/W_x - M_y/W_y.$$

Pour une section de contour arbitraire ne possédant aucun point angulaire, il faut trouver au préalable les points présentant un danger, points soumis aux contraintes de traction et de compression (fig. IX.3). A cet effet, on procède de la façon suivante. On détermine d'abord la position de

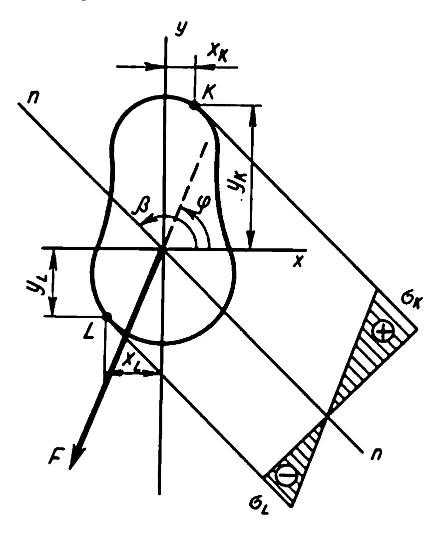


Fig. IX.3

la ligne nulle en flexion déviée, c'est-à-dire l'ensemble des points de la section où les contraintes normales sont nulles. Autrement dit, on détermine la ligne de séparation des parties sollicitées à la traction et des parties subissant la compression. Supposons que ce soit la ligne *nn*.

En flexion les contraintes augmentent à mesure qu'on s'éloigne de la ligne nulle. Ceci est rendu clair par le fait que (IX.1) est une équation du plan qui passe par la ligne nulle. L'ordonnée mesurée suivant la normale entre l'un des points de la section droite et la ligne nulle est égale numériquement à la contrainte en ce point. Elle est maximale pour le point qui se trouve le plus loin de la ligne nulle.

Compte tenu de ce fait, tirons la conclusion que les points, où il faut vérifier les contraintes, sont les plus éloignés de la ligne nulle (K et L). Pour un matériau susceptible de subir la traction et la compression de mêmes valeurs, le point dangereux est celui des points considérés, où la contrainte subie est la plus grande en module.

L'équation de la ligne nulle s'obtient en annulant le deuxième membre de la formule (IX.1)

$$M_x y_0/I_x + M_y x_0/I_y = 0$$

ou

$$M_x(y_0/I_x + Kx_0/I_y) = 0, \qquad \text{(IX.3)}$$

où, en vertu des formules (a) et (b),

$$K = M_y/M_x = \text{cotg}\,\varphi, \tag{IX.4}$$

et x_0, y_0 sont les coordonnées courantes des points de la ligne nulle. Etant donné que $M_x \neq 0$, il vient

$$y_0/I_x + Kx_0/I_y = 0. \qquad \text{[IX.5]}$$

Ceci est justement l'*équation de la ligne nulle*. On voit que c'est une équation de la droite qui passe par l'origine des coordonnées. En divisant ses deux membres par x_0, on obtient

$$y_0/(x_0 I_x) + K/I_y = 0. \qquad \text{[IX.6]}$$

Or, le quotient $y_0/x_0 = \text{tg}\,\beta$, tangente de l'angle d'inclinaison de la ligne nulle à l'axe x, est son coefficient angulaire. Donc, $\text{tg}\,\beta/I_x + K/I_y = 0$ ou

$$k = \text{tg}\,\beta = -KI_x/I_y = -I_x/(I_y\,\text{cotg}\,\varphi). \tag{IX.7}$$

Cette équation montre que pour $I_x \neq I_y$, l'angle β n'est pas égal à l'angle φ, c'est-à-dire que la ligne nulle n'est pas perpendiculaire à la *ligne de force*, comme il en a été dans le cas de la flexion simple. C'est dans un cas particulier lorsque $I_x = I_y$ (cercle, carré, etc.), qu'on a

$$\text{tg}\,\beta = -\text{cotg}\,\varphi = -\text{tg}(90° - \varphi) = \text{tg}(\varphi - 90°),$$
$$\text{c'est-à-dire} \quad \beta = \varphi - 90°.$$

Par conséquent, la ligne nulle est perpendiculaire à la ligne de force : c'est le cas de la flexion simple.

Il convient de noter que les lignes nulle et de force reposent dans les quadrants connexes. Si, par exemple, la ligne de force passe par le I^r et le IIIe quadrants ($0 < \varphi < 90°$), en vertu de la formule (IX.7) on a pour β une valeur inférieure à 90° et, de plus, affectée de signe moins. Ceci signifie que l'angle β doit être porté par rapport à l'axe x dans le sens horaire et que la ligne nulle passe par les quadrants IV et II.

Après avoir déterminé la position de la ligne nulle et trouvé les points de la section droite les plus éloignés de celle-ci (points dangereux), on peut procéder à la vérification de la résistance de la section.

Si le matériau de la poutre résiste d'une façon différente à la traction et à la compression, la résistance doit être vérifiée pour les deux points les plus éloignés de la ligne nulle (points K et L de la figure IX.3). Dans ce cas, admettant que la barre est une console comme sur la figure IX.2, les conditions de résistance s'écrivent

$$\sigma_K = +M_x y_K/I_x + M_y x_K/I_y \leqslant \sigma^{t}_{\text{adm}}, \tag{IX.8}$$

$$\sigma_L = \frac{-M_x}{I_x} y_L - \frac{M_y}{I_y} x_L \leqslant \sigma^{c}_{\text{adm}}. \tag{IX.9}$$

Lorsque $\sigma^t_{adm} = \sigma^c_{adm}$, cas des matériaux plastiques, le calcul, comme nous l'avons dit, se fait pour un point, par exemple, pour K (fig. IX.3), du fait que $\sigma_K > \sigma_L$.

Pour les sections du type rectangle, en H, etc., la condition de la résistance s'obtient à partir de la formule [IX.2]:

$$\sigma = M_x/W_x + M_y/W_y \leqslant \sigma_{adm}. \qquad \text{[IX.10]}$$

Un matériau fragile, par exemple, la fonte, impose de porter dans la formule [IX.10] la contrainte à la traction admissible σ^t_{adm}.

Les dimensions requises de la section droite se calculent en appliquant (en fonction de la forme de la section) l'une des formules (IX.8), (IX.9) ou [IX.10], le calcul étant ordinairement réalisé par la méthode des approximations successives. En retenant certaines dimensions de la section, on vérifie si ces formules satisfont aux conditions de résistance. Si l'écart entre les contraintes en service et admissibles est important, on choisit d'autres dimensions de la section et refait le calcul. Ces approximations se poursuivent tant que σ_{adm} ne soit supérieur à σ_{max} de 5 à 10 %. Pour choisir les dimensions des poutres laminées on consulte les tableaux des normes.

Le choix de la section circulaire se fait d'après la formule du moment fléchissant global en flexion simple

$$M_{tot} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

du fait que pour un cercle la ligne nulle est perpendiculaire à la ligne d'action de M_{tot}.

Un certain intérêt pratique présente le problème du choix de la forme de la section droite, pour assurer dans le cas de la flexion dérviée le débit minimal du matériau. On montre sans peine (et le lecteur peut le faire lui-même) que pour une section rectangulaire (cf. fig. IX.2) le débit minimal du matériau (aire minimale de la section) correspond à la condition $h/b = M_x/M_y$.

Toutefois, dans le cas de la flexion déviée, la section rectangulaire n'est pas la plus avantageuse, les meilleures en ce sens étant les sections en caisson à parois minces.

En flexion déviée, les flèches sont déterminées isolément dans chaque plan, soit par intégration de l'équation différentielle de l'axe fléchi, soit d'après l'équation universelle, soit encore suivant la méthode de Mohr. La flèche globale se calcule comme la somme géométrique des composantes des flèches constitutives :

$$f_{tot} = \sqrt{f_h^2 + f_v^2}, \qquad \text{(IX.11)}$$

où f_h et f_v sont les flèches dans les plans horizontal et vertical.

La condition de la rigidité est de la forme : $f_{max} \leqslant f_{adm}$, où f_{adm} est la flèche admissible.

Exemple IX.1. Choisir la section de la poutre fléchie suivant deux plans (fig. IX.4). La contrainte admissible $\sigma_{adm} = 160$ MPa $= 160 \cdot 10^3$ kPa.

Solution. Construisons les diagrammes des moments fléchissants dans les plans vertical et horizontal pour obtenir les valeurs maximales des moments :

$$M_x = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} ; \qquad M_y = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Comparons quelques variantes des sections droites.

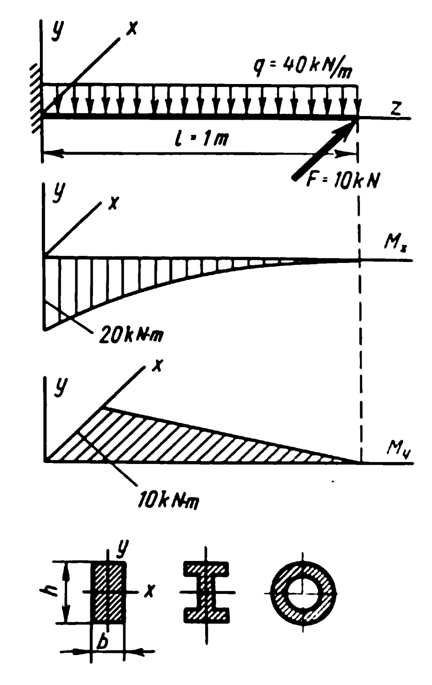


Fig. IX.4

1. *Section rectangulaire*. Adoptons la relation optimale :

$$h/b = M_x/M_y = 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad h = 2b.$$

Alors, la formule [IX.10] donne

$$\sigma = M_x/W_x + M_y/W_y = \sigma_{adm} ;$$

$$\sigma = \frac{20 \cdot 6}{b \cdot 4b^2} + \frac{10 \cdot 6}{2b \cdot b^2} = 160 \cdot 10^3 \text{ kPa}.$$

On en tire $b = 7{,}2 \cdot 10^{-2}$ m ; $h = 14{,}4 \cdot 10^{-2}$ m. L'aire de la section droite $A_1 = 104 \cdot 10^{-4}$ m^2.

2. *Section en* H. Adoptons la section en H n° 36 pour laquelle $W_x = 743$ cm^3 = 743 × × 10^{-6} m^3, $W_y = 71{,}1$ cm^3 = $71{,}1 \cdot 10^{-6}$ m^3, $A = 61{,}9$ cm^2 = $61{,}9 \cdot 10^{-4}$ m^2. D'après la formule [IX.10]

$$\sigma = \frac{20}{743 \cdot 10^{-6}} + \frac{10}{71{,}1 \cdot 10^{-6}} = 27 \cdot 10^3 + 140 \cdot 10^3 = 167 \cdot 10^3 \text{ kPa} = 167 \text{ MPa},$$

ce qui dépasse la contrainte admissible de 4,4 % (ce qui est admissible).

3. *Section annulaire.* Le rapport du diamètre intérieur au diamètre extérieur $c = d/D = 0{,}9$.

Une poutre de section circulaire (pleine ou annulaire) doit se calculer d'après les formules du moment global en flexion simple

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}3 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Déterminons le diamètre de la section

$$\sigma = \frac{22{,}3}{0{,}1D^3(1 - 0{,}9^4)} = 160 \cdot 10^3 \text{ kPa},$$

d'où $D = 0{,}016$ m ; $d = 0{,}9 \cdot 16 \cdot 10^{-2} = 14{,}4 \cdot 10^{-2}$ m; $A = 37{,}7 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$.

Si l'on admet que l'aire de la section annulaire vaut 100% , l'aire de la section en H vaut 165 % et l'aire rectangulaire, 276 %.

Cet exemple montre les grandes possibilités que présente le choix des sections rationnelles pour réduire le débit des matériaux.

Il est proposé au lecteur de poursuivre l'exploration de cette question, en examinant les sections en caisson à différentes relations entre la largeur et la hauteur de la section.

§ 76. Flexion avec traction (compression)

La figure IX.5 représente une poutre soumise à l'action conjointe de la flexion et de la traction centrale. La charge transversale qui provoque la flexion peut être également plus compliquée.

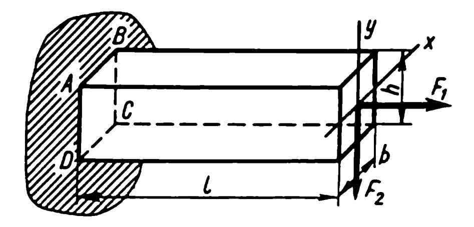


Fig. IX.5

Pour déterminer les contraintes globales, faisons appel au principe de l'indépendance de l'effet des forces. Les contraintes de traction dues à la force F_1 en tous les points de la section droite sont, comme on le sait, égales entre elles et se calculent d'après la formule

$$\sigma = F_1/A$$

ou dans le cas général (quelle que soit la charge axiale) d'après la formule [II.2] :

$$\sigma = N/A,$$

où N est l'effort normal dans la section envisagée.

La formule [VI.8] donne la contrainte engendrée par la flexion

$$\sigma = M_x y / I_x.$$

Par conséquent, en un point quelconque les contraintes globales

$$\sigma = N/A + M_x y/I_x. \quad \text{(IX.12)}$$

Dans le cas considéré la section dangereuse est celle de l'encastrement où le moment fléchissant est maximal : $M_{max} = F_2 l$. Dans cette section les points les plus chargés sont ceux qui reposent sur la ligne AB du fait que là les contraintes de traction et les contraintes maximales engendrées par la flexion $\sigma_{max} = N/A + M_x/W_x$ sont sommées. Aux points de la ligne DC les contraintes sont plus faibles :

$$\sigma = N/A - M_x/W_x.$$

Pour les barres susceptibles de résister de la même façon à la traction et à la compression, la condition de résistance est de la forme :

$$\sigma_{max} = N/A + M_x/W_x \leqslant \sigma_{adm}. \quad \textbf{[IX.13]}$$

Si l'effort tranchant est composé, pour déterminer la section dangereuse et le moment fléchissant maximal, il faut construire au préalable le diagramme des moments fléchissants.

Les relations obtenues sont valables également pour l'action d'une force de compression. Seulement la contrainte N/A est alors négative, et les contraintes maximales en module sont appliquées aux points de la ligne DC. Il faut noter que dans la compression les formules mentionnées ne conviennent que pour les barres à forte rigidité, telles que l'influence de la force de compression axiale sur la déformation de flexion soit négligeable et puisse ne pas être prise en compte (cf. chapitre X).

Dans le cas de la combinaison de la traction et de la flexion déviée les contraintes s'écrivent

$$\sigma = N/A + M_x y/I_x + M_y x/I_y. \quad \text{(IX.14)}$$

Pour les barres en matériaux susceptibles de subir les mêmes sollicitations à la traction et à la compression, dont les sections droites possèdent des points anguleux équidistants des axes principaux x et y (type rectangle, en H, etc.), la condition de la résistance est de la forme

$$\sigma = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y \leqslant \sigma_{adm}. \quad \textbf{[IX.15]}$$

Pour les barres en matériaux résistants d'une façon différente à la traction et à la compression, la résistance doit être vérifiée tant aux contraintes de traction qu'aux contraintes de compression.

§ 77. Compression (traction) excentrée

Il est très fréquent que la charge longitudinale est appliquée non pas au centre de gravité de la section droite de la barre, mais en est légèrement déplacée (excentrée) par rapport aux axes principaux de la section (fig. IX.6, *a*).

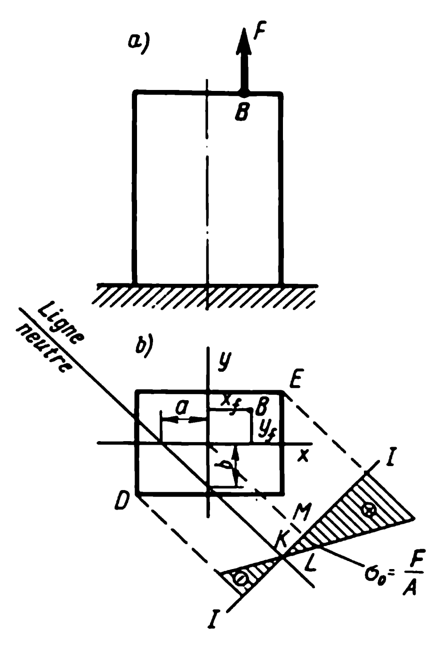


Fig. IX.6

En appliquant la méthode des sections, on découvre dans toute section droite un effort normal $N = F$ et les moments fléchissants égaux par rapport à l'axe x à $M_x = Fy_f = Ny_f$, et par rapport à l'axe y, à $M_y = Fx_f = Nx_f$. C'est pourquoi en un point quelconque de la section droite de coordonnées x et y, la contrainte est déterminée, de même qu'en traction axiale avec flexion dans deux plans, d'après une formule analogue à (IX.14) :

$$\sigma = N/A + M_x y/I_x + M_y x/I_y.$$

Pour les sections possédant des points anguleux saillants, les contraintes extrémales s'écrivent :

$$\sigma = N/A \pm M_x/W_x \pm M_y/W_y, \qquad \text{(IX.16)}$$

où W_x et W_y sont les couples de réaction par rapport aux axes x et y.

Dans la section représentée sur la figure IX.6, *b*, les contraintes maximales sont appliquées au point E du fait que là s'additionnent les contrain-

tes de traction dues à la traction centrale et les contraintes de traction produites par la flexion dans deux plans :

$$\sigma_E = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y. \tag{IX.16a}$$

Les contraintes minimales (au sens algébrique) sont appliquées au point D :

$$\sigma_D = N/A - M_x/W_x - M_y/W_y.$$

Elles peuvent être aussi bien de traction que de compression.

La condition de résistance par rapport aux contraintes de traction s'écrit

$$\sigma_t = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y \leqslant \sigma^t_{adm}. \qquad \textbf{[IX.17]}$$

Si le point d'application de la force se trouve sur l'un des axes principaux de la section, par exemple sur l'axe y, la formule précédente devient plus simple :

$$\sigma_t = N/A + M_x/W_x \leqslant \sigma_{adm}. \tag{IX.18}$$

Lorsque la forme de la section droite est arbitraire, pour déterminer la position des points dangereux, il faut établir la position de la *ligne nulle* (ou *neutre*) dont l'équation s'obtient en annulant la contrainte :

$$N/A + Ny_f y_0/I_x + Nx_f x_0/I_y = 0, \tag{IX.19}$$

où x_0 et y_0 sont les coordonnées courantes des points de cette ligne.

Introduisons les notations : $i_x^2 = I_x/A$; $i_y^2 = I_y/A$.

Les quantités $i_x = \sqrt{I_x = I_x/A}; i_y\sqrt{I_y = I_y/A}$ *caractérisent la géométrie* de la section et s'appellent *rayons de giration de la section par rapport aux axes* x et y. La dimension du rayon de giration est une unité de longueur, généralement, le centimètre. Maintenant la formule (IX.19) devient

$$\frac{N}{A}\left(1 + \frac{x_f x_0}{i_y^2} + \frac{y_f y_0}{i_x^2}\right) = 0.$$

Etant donné que $N/A \neq 0$; on a

$$x_f x_0/i_y^2 + y_f y_0/i_x^2 + 1 = 0. \qquad \textbf{[IX.20]}$$

Ceci est précisément l'équation de la ligne nulle. On peut la mettre sous la forme de l'équation d'une droite aux segments

$$x_0/a + y_0/b = 1, \tag{IX.21}$$

où

$$\left.\begin{aligned} a &= -i_y^2/x_f, \\ b &= -i_x^2/y_f \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.22)}$$

sont les segments sectionnés par la ligne nulle sur les axes des coordonnées x et y.

Le rayon de giration étant toujours positif, les quantités a et x_f, ainsi que b et y_f ont des signes différents.

Après avoir déterminé la position de la ligne nulle, il est facile de construire le diagramme des contraintes normales. A cet effet, menons la ligne I — I (l'axe du diagramme) perpendiculaire à la ligne nulle (fig. IX.6, *b*). Projetons sur cette ligne les points extrêmes de la section D et E, en abaissant sur I — I des perpendiculaires issus de E et D.

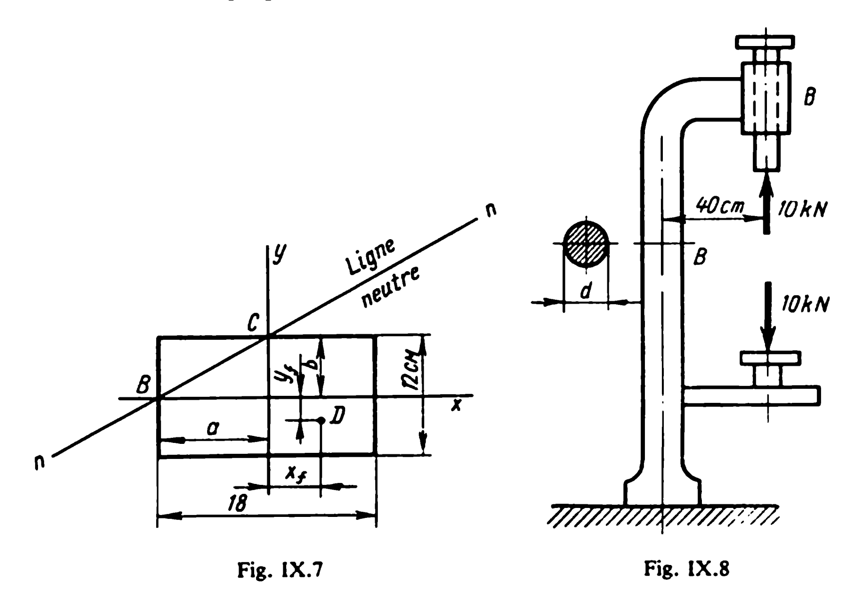


Fig. IX.7

Fig. IX.8

Pour construire le diagramme des contraintes on a deux points: K sur la ligne nulle, où $\sigma = 0$, et L qui s'obtient à partir de la condition qu'à une échelle définie le segment LM doit donner la valeur de la contrainte au centre de gravité de la section. Puisque en ce centre $x = y = 0$, la formule [IX.15] conduit à

$$\sigma_0 = N/A = F/A.$$

Exemple IX.2. Déterminer la position de la ligne nulle pour la section représentée sur la figure IX.7, si $x_f = 3$ cm; $y_f = -2$ cm.

Solution. Les formules (IX.22) permettent de déterminer les segments sectionnés par la ligne nulle sur les axes principaux x et y:

$$a = -\frac{i_y^2}{x_f} = -\frac{12 \cdot 18^3 \cdot 10^{-8}/(12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 10^{-4})}{3 \cdot 10^{-2}} = -9 \cdot 10^{-2}\text{m} = -9\ \text{cm};$$

$$b = \frac{i_x^2}{y_f} = \frac{18 \cdot 12^3 \cdot 10^{-8}/(12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 10^{-4})}{-2 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^{-2}\text{m} = 6\text{cm}.$$

Portons ces segments et menons par les points B et C la ligne nulle nn.

Exemple IX.3. Lors du perçage d'une pièce la broche B de la machine subit l'action d'une force axiale de 10 kN (fig. IX.8). Calculer le diamètre de la colonne de fonte pleine C. Contrainte à la traction admissible $\sigma^t_{adm} = 40$ MPa $= 40 \cdot 10^3$ kPa.

Solution. La colonne travaille à la flexion excentrée. D'après la formule (IX.18), on a

$$\sigma = N/A + M/W_x \leqslant \sigma^t_{adm}.$$

En y portant les valeurs numériques, il vient

$$\sigma = \frac{10 \cdot 4}{3{,}14d^2} + \frac{10 \cdot 0{,}40}{0{,}1d^3} \leqslant 40 \cdot 10^3 \text{ kPa}.$$

On trouve par approximations successives : $d = 10{,}1 \cdot 10^{-2}\text{m} = 10{,}1\text{cm}$.

Exemple IX.4. Une barre de section rectangulaire 10 × 20 cm encastrée à une extrémité est soumise à la traction par la force $F_1 = 50$ kN, appliquée avec une excentricité de

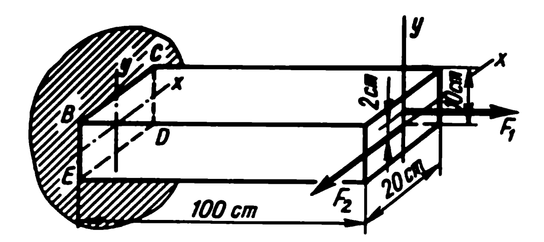


Fig. IX.9

2 cm par rapport à l'axe x, et à la flexion, par une force $F_2 = 4$ kN (fig. IX.9). Déterminer les contraintes normales aux points E, B, C et D de la section de l'encastrement.

Indication. La force F_1 provoque la traction et la flexion dans le plan vertical (par rapport à l'axe x) ; la force F_2 fléchit la barre dans le plan horizontal (par rapport à l'axe y).

Réponse. $\sigma_E = -6{,}5$ MPa (compression) ; $\sigma_B = -0{,}5$ MPa (compression) ; $\sigma_C = +11{,}5$ MPa (traction) ; $\sigma_D = +5{,}5$ MPa (traction).

§ 78. Torsion avec cisaillement. Calcul des ressorts à petit pas d'hélice

L'action conjointe de l'effort tranchant et du moment de torsion est subie par les sections droites des spires d'un ressort à petit pas comprimé ou tendu par une force F (fig. IX.10).

Pour calculer les efforts intérieurs dans les sections droites de la tige du ressort, appliquons la méthode des sections. Pratiquons une section

et considérons l'équilibre de la partie inférieure du ressort (fig. IX.11).

Soient D, le diamètre moyen du ressort ; n, le nombre de ses spires ; d, le diamètre de la section droite d'une spire ; la pente de la spire est négligée.

L'équilibre de cette partie du ressort est assuré seulement dans le cas où l'on applique à la section droite de la tige un effort tranchant Q égal en module à la force F et le moment de torsion T égal au moment de la

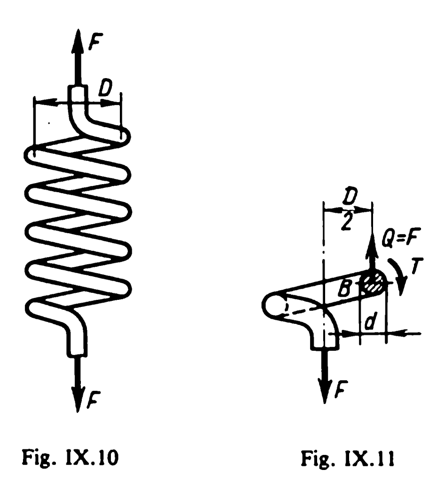


Fig. IX.10 Fig. IX.11

force F par rapport au centre de gravité de la section (par rapport à l'axe longitudinal de la spire).

Si l'on tient compte de la pente d'une spire, la section droite du fil est encore sollicitée par l'effort normal et le moment fléchissant. Mais lorsque l'angle de la pente de la spire est petit, ces efforts sont peu grands et on peut les négliger.

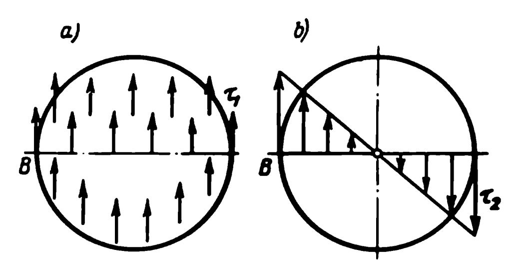


Fig. IX.12

La force Q et le moment T se trouvent à partir de l'équation d'équilibre. En annulant la somme des projections sur l'axe vertical des forces appliquées à la partie rejetée, on obtient $Q = F$. En annulant la somme des moments appliqués à la partie rejetée, on a $T = FD/2$.

Supposons que les contraintes tangentielles liées à l'effort tranchant soient réparties uniformément suivant la section (fig. IX.12, *a*) :

$$\tau_1 = Q/A = 4F/(\pi d^2). \qquad \text{(IX.23)}$$

Admettons également que les contraintes tangentielles qui correspondent à la déformation de torsion (associées au moment de torsion soient réparties uniformément suivant la section de la spire, de la même façon que lors de la torsion d'une barre droite de section circulaire, c'est-à-dire qu'elles augmentent suivant une loi linéaire du centre vers la périphérie de la section (fig. IX.12, *b*). Par conséquent, les contraintes maximales dues à la torsion sont données par la formule

$$\tau_2 = T/W_p = \frac{FD/2}{\pi d^3/16} = 8FD/(\pi d^3). \qquad \text{(IX.24)}$$

Le point dangereux est le point *B* du contour, où les directions de τ_1 et τ_2 coïncident. Par conséquent, les contraintes tangentielles maximales

$$\tau_{max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D}\right). \qquad \text{(IX.25)}$$

Dans la plupart des cas le deuxième terme entre parenthèses est sensiblement inférieur à l'unité et on peut le négliger, ce qui est équivalent à négliger l'influence du cisaillement par rapport à l'influence de la torsion.

Alors, on peut adopter approximativement: $\tau_{max} \approx \tau_2 \approx 8FD/(\pi d^3)$.

Dans la pratique, les ressorts à petit pas d'hélice se calculent d'après la formule

$$\tau_{max} = k8FD/(\pi D^3) \leqslant \tau_{adm}, \qquad \text{[IX.26]}$$

où *k* est le coefficient de correction qui rend compte de l'influence de la force *F* et de la courbure de la spire sur la distribution et les valeurs des contraintes tangentielles assosiées au moment de torsion. Voici les valeurs de *k*:

D/d	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Pour déterminer la flèche δ du ressort, égalons le travail de la force extérieure *F* à l'énergie potentielle de déformation de la torsion. Le travail de la force *F* sur le déplacement δ vaut $W = F\delta/2$.

L'énergie potentielle de la déformation en torsion (cf. § 39)

$$U = \frac{1}{2}\frac{T^2}{GI_p} = \frac{1}{2}\frac{(FD/2)^2 l}{GI_p},$$

où $l = \pi Dn$ est la longueur du fil employé pour l'enroulement du ressort ; n, le nombre de spires; G, le module de cisaillement.

Etant donné que $W = U$ en vertu de la loi de conservation de l'énergie, il vient

$$\frac{F\delta}{2} = \frac{F^2D^2\pi Dn}{8G\pi d^4/32}, \qquad \text{[IX.27]}$$

d'où $\delta = 8FD^3n/(Gd^4)$.

Exemple IX.5. Vérifier la résistance du ressort et déterminer sa flèche si $F = 3$ kN ; $D = 0{,}2$ m ; $\tau_{adm} = 250 \cdot 10^3$ kPa ; $d = 0{,}02$ m ; le nombre de spires $n = 8$; $G = 8 \cdot 10^7 \text{kN/m}^2 = 8 \cdot 10^4$ MPa.

Solution. Calculons la contrainte (formule [IX.26]) :

$$\tau_{max} = 1{,}14 \frac{8 \cdot 3 \cdot 0{,}2}{3{,}14 \cdot 2^3 \cdot 10^{-6}} = 218 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 218 \text{ MPa},$$

ce qui est de 8,8 % inférieur à la valeur admissible. Là nous adoptons $k = 1{,}14$ pour $D/d = 10$.

Calculons la flèche du ressort en appliquant la formule [IX.27] :

$$\delta = \frac{8 \cdot 3 \cdot 20^3 \cdot 10^{-6} \cdot 8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}} = 12 \cdot 10^{-2}\text{m} = 12 \text{ cm}.$$

Exemple IX.6. Le ressort est boudiné à partir du fil d'acier à $d = 4$ mm. Le diamètre moyen du ressort $D = 45$ mm. Le nombre de spires* actives du ressort $n = 6$. A l'état non chargé le jeu entre les spires $S_0 = 1{,}0$ mm. Quelle force faut-il appliquer au ressort pour rendre les spires jointives ?

Indication. Avant l'application de la force rendant les spires jointives la flèche du ressort $\delta = (n - 1)S$.

Réponse. $F = 23{,}5$ N.

§ 79. Torsion avec flexion

La barre représentée sur la figure IX.13 travaille à la torsion et à la flexion. En construction mécanique les pièces qui travaillent à la torsion et à la flexion sont très nombreuses. Leur exemple est fourni par les arbres de diverses machines.

Commençons en appliquant le principe de l'indépendance de l'effet des forces, par le calcul, d'une part, de la contrainte engendrée dans la barre par la torsion, et de l'autre, par la flexion. En flexion les sections droites de la barre subissent, comme on le sait, des contraintes normales qui atteignent les valeurs maximales dans les fibres extrêmes: $\sigma = M/W_x$, et des contraintes tangentielles qui se calculent d'après la formule de Jouravski et

* Le nombre total de spires d'un ressort de compression est de 1,5 à 2 plus grand que le nombre de spires actives du fait que les spires extrêmes en contact avec les plateaux d'appui ne participent pas à la déformation.

qui atteignent la valeur maximale près de l'axe neutre. Pour les sections circulaires, et en général pleines, les contraintes tangentielles sont négligeables par rapport à celles dues à la torsion.

Les sections droites soumises à la torsion sont sollicitées par des contraintes tangentielles qui atteignent la valeur maximale sur le contour de la section $\tau = T/W_p = T/(2W_x)$.

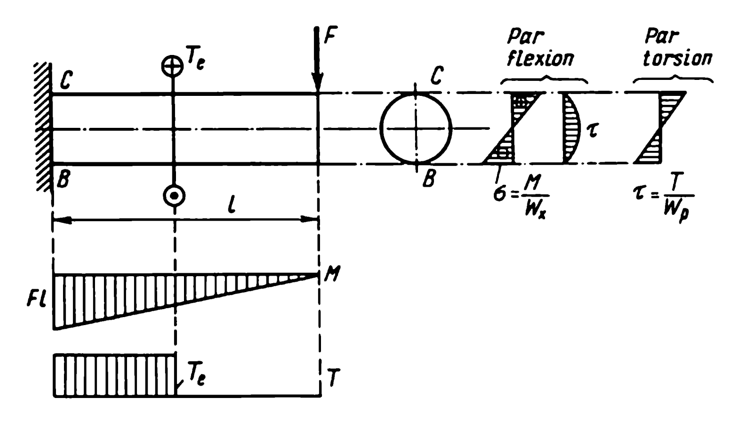


Fig. IX.13

Dans le cas visualisé par la figure IX.13 la section soumise au moment fléchissant maximal se confond avec la section subissant le moment de torsion maximal: c'est la section de l'encastrement. Dans cette section les points qui présentent le danger sont C et B. Examinons l'état de contrainte en C (fig. IX.14). La section droite qui passe par ce point subit les contraintes tangentielles maximales produites par la torsion $\tau = T/W_p$ et les contraintes normales maximales (dans notre cas, de traction) dues à la

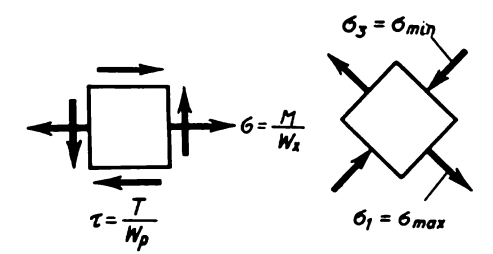


Fig. IX.14

flexion $\sigma = M/W_x$. La section longitudinale ne subit pas de contraintes normales, alors qu'en vertu de la loi de la parité les contraintes tangentielles ont la même valeur que dans la section droite.

L'état de contrainte étant biaxial, pour réaliser la vérification appliquons l'une des hypothèses de la résistance. Considérons les arbres en acier

et appliquons la troisième ou la quatrième hypothèse. A cet effet, il faut déterminer les contraintes principales de l'état de contrainte donné (fig. IX.14). Les contraintes principales se calculent d'après la formule connue

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Nous ne nous proposons pas de calculer l'angle d'inclinaison des aires principales, cet angle étant donné par la formule [II.35].

D'après la troisième hypothèse (hypothèse des contraintes tangentielles maximales) la condition de résistance

$$\sigma_{réd} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_{adm}.$$

En y portant les valeurs de σ_1 et σ_3, on a

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad [IX.28]$$

Compte tenu que $\sigma = M/W_x$ et $\tau = T/(2W_x)$, il vient

$$\sigma_{réd} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_x} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad [IX.29]$$

On en tire la relation pour le choix de la section (calcul de conception):

$$W_x = \sqrt{M^2 + T^2}/\sigma_{adm}. \qquad (IX.30)$$

Rappelons que dans le cas où l'arbre subit la flexion dans deux plans réciproquement perpendiculaires, il vient

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

D'après la quatrième hypothèse de la résistance (hypothèse de l'énergie potentielle du changement de forme), pour l'état de contrainte plan la condition de la résistance est de la forme

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leqslant \sigma_{adm}.$$

En y portant les valeurs de σ_1 et σ_3 exprimées à l'aide de σ et τ dans la section droite de l'arbre, on obtient

$$\sigma_{réd} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant \sigma_{adm}, \qquad [IX.31]$$

mais $\sigma = M/W_x$ et $\tau = T/2W_x$; donc,

$$\sigma_{réd} = \frac{\sqrt{M^2 + 0{,}75T^2}}{W_x} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad [IX.32]$$

On en tire pour le choix de la section

$$W_x = \sqrt{M^2 + 0{,}75T^2}\,/\sigma_{\text{adm}}. \qquad \text{(IX.33)}$$

Pour les matériaux dont la résistance en traction est différente de celle en compression (certaines nuances de l'acier allié, la fonte, certains alliages), il convient d'utiliser l'hypothèse de Mohr :

$$\sigma_{\text{réd}} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leqslant \sigma^{\text{t}}_{\text{adm}}.$$

En y portant les valeurs de σ_1 et σ_3, il vient

$$\sigma_{\text{réd}} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad \text{(IX.34)}$$

ou

$$\sigma_{\text{réd}} = \frac{1-m}{2}\,\frac{M}{W_x} + \frac{1+m}{2W_x}\sqrt{M^2 + T^2} \leqslant \sigma_{\text{adm}}. \qquad \text{[IX.35]}$$

On en tire la relation pour le choix des sections :

$$W_x = \frac{M(1-m) + (1+m)\sqrt{M^2 + T^2}}{2\sigma_{\text{adm}}}. \qquad \text{(IX.36)}$$

§ 80. Torsion avec traction (compression)

Les sections droites de la barre subissent alors simultanément deux efforts intérieurs, le moment de torsion et l'effort normal (de traction ou de compression).

Pour une barre de section circulaire les contraintes tangentielles maximales à la torsion sont engendrées aux points du contour de la section $\tau = T/W_p$. En traction tous les points de la section droite sont sollicités par des contraintes normales $\sigma = N/A$.

Maintenant, tout comme en torsion avec flexion, il faut déterminer les contraintes principales et appliquer l'hypothèse de la résistance correspondante. Il en résulte pour les contraintes équivalentes la formule [IX.28] (troisième hypothèse de la résistance) ou [IX.31] (quatrième hypothèse). Il faut porter dans ces formules les valeurs de τ et σ mentionnées dans ce qui précède.

Finalement, on obtient la condition de résistance à la torsion avec traction (compression) :

a) troisième hypothèse de la résistance :

$$\sigma_{\text{réd}} = \sqrt{(N/A)^2 + 4(T/W_p)^2} \leqslant \sigma_{\text{adm}}. \qquad \text{(IX.37)}$$

b) quatrième hypothèse de la résistance:

$$\sigma_{réd} = \sqrt{(N/A)^2 + 3(T/W_p)^2} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad [IX.38]$$

Il est recommandé de donner la préférence à la formule [IX.38] du fait que pour les matériaux plastiques la quatrième hypothèse s'accorde bien avec les données empiriques et conduit à des solutions plus économiques.

Pour les matériaux à résistance différente en traction et en compression, on obtient d'après l'hypothèse de Mohr (formule (IX.34))

$$\sigma_{réd} = \frac{1-m}{2}\frac{N}{A} + \frac{1-m}{2}\sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad [IX.39]$$

Pour le cas de l'action simultanée de la flexion, de la torsion et de la traction (compression) on a d'une façon analogue la formule de calcul (quatrième hypothèse de la résistance) :

$$\sigma_{réd} = \sqrt{(N/A + M/W_x)^2 + 3(T/W_p)^2} \leqslant \sigma_{adm}. \qquad [IX.40]$$

Le choix des sections se fait en appliquant la méthode des approximations successives, c'est-à-dire en se donnant une certaine valeur du diamètre et en vérifiant si les conditions de résistance [IX.38], [IX.39] ou [IX.40] sont observées. Si la différence entre les premier et deuxième membres est grande, il faut retenir une nouvelle valeur du diamètre, etc. (si on emploie une règle à calcul ou un microcalculateur, cette procédure ne demande pas beaucoup de temps).

Dans les vérifications, lorsque le diamètre de l'arbre est connu, le coefficient de sécurité s'écrit

$$n = \sigma_é/\sigma_{réd}, \qquad (IX.41)$$

où $\sigma_é$ est la limite d'écoulement; $\sigma_{réd}$, la contrainte réduite d'après l'hypothèse de la résistance correspondante.

Pour les matériaux plastiques la contrainte réduite (équivalente) peut se calculer en recourant à la troisième hypothèse et en utilisant la formule [IX.28]. Dans ce cas le coefficient de sécurité

$$n = \sigma_é/\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Cette formule peut être également mise sous la forme

$$n = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\sigma_é^2} + \dfrac{\tau^2}{(\sigma_é/2)}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\sigma_é^2} + \dfrac{\tau^2}{\tau_é^2}}}, \qquad (IX.42)$$

où, en vertu de la troisième hypothèse de la résistance, $\tau_é = \sigma_é/2$.

Après certaines transformations la formule (IX.42) est ramenée à la forme

$$n = \frac{1}{\sqrt{1/n_\sigma^2 + 1/n_\tau^2}} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \qquad [IX.43]$$

où $n_\sigma = \sigma_{\acute{e}}/\sigma$ est le coefficient de sécurité par rapport aux contraintes normales ; $n_\tau = \tau_{\acute{e}}/\tau$, le coefficient de sécurité suivant les contraintes tangentielles.

Il convient de noter que les formules (IX.42) et [IX.43] restent en vigueur lorsqu'on applique la quatrième hypothèse, à cette différence près que dans ce cas $\tau_{\acute{e}} \approx 0{,}58\sigma_{\acute{e}}$.

§ 81. Calcul de l'arbre à la flexion avec torsion

En cours de conception les arbres sollicités à la torsion et à la flexion sont calculés à la résistance statique d'après les efforts maximaux de courte durée ainsi qu'à l'endurance sous les efforts variables de grande durée (cf. chapitre XII).

Voici un exemple de calcul de l'arbre (fig. IX.15, *a*) à la résistance statique. L'arbre subit l'action de deux forces verticales F_1 et F_3, d'une force horizontale F_2 et de trois moments extérieurs : $T_1 = 4$ kN·m ; $T_2 = 10$ kN·m ; $T_3 = 6$ kN·m, qui provoquent la déformation de torsion. Le matériau de l'arbre : acier 45 ; sa limite d'écoulement $\sigma_{\acute{e}} = 360$ MPa ; la charge de rupture $\sigma_u = 610$ MPa.

D'après les données du § 11, établissons le coefficient de sécurité général n comme le produit de trois coefficients partiels :

$$n = n_1 n_2 n_3.$$

Adoptons : $n_1 = 1{,}3$ (compte tenu de la précision moyenne de la détermination des contraintes), $n_2 = 1{,}4$ (pour le rapport $\sigma_{\acute{e}}/\sigma_u = 0{,}6$), $n_3 = 1{,}3$ (compte tenu de la responsabilité moyenne de la pièce).

Ainsi, le coefficient de sécurité général

$$n_1 = 1{,}3 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}3 = 2{,}36.$$

La contrainte admissible $\sigma_{adm} = 360/2{,}36 = 150$ MPa.

1. Construisons le diagramme des moments fléchissants dus aux forces verticales M_v (fig. IX.15, *b*).

2. Contruisons le diagramme des moments fléchissants produits par les forces horizontales. Le diagramme de M_h confondu par convention avec le plan du dessin est représenté sur la figure IX.15, *c*.

La section de l'arbre étant circulaire, le calcul se fait d'après les formules de la flexion simple et du moment fléchissant global.

3. Dans les sections C et E les moments fléchissants globaux

$$M^D_{tot} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m} ; \qquad M^C_{tot} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14{,}1 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$M^E_{tot} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

4. Construisons le diagramme des moments de torsion. Le diagramme de T est représenté sur la figure IX.15, d.

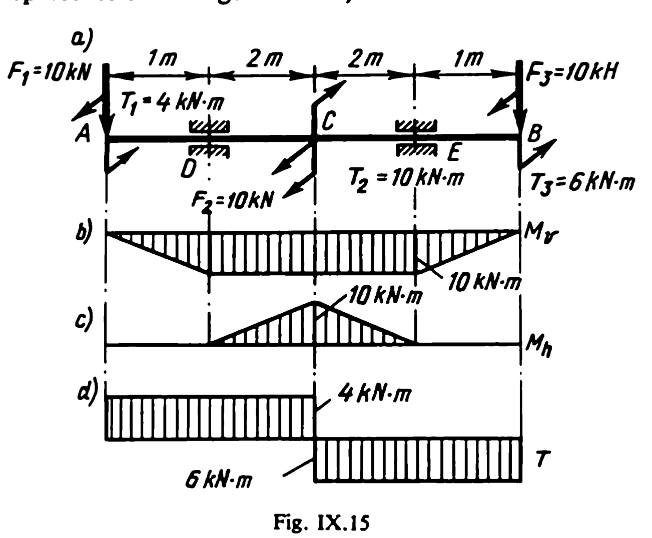


Fig. IX.15

Déterminons le diamètre de l'arbre dans la section dangereuse C soumise au moment fléchissant maximal $M^C_{tot} = 14{,}1$ kN · m et au moment de torsion $T = 6$ kN · m.

Pour choisir la section, appliquons la quatrième hypothèse de la résistance

$$W_x = \frac{\sqrt{M^2 + 0{,}75T^2}}{\sigma_{adm}} = \frac{\sqrt{14{,}1^2 + 0{,}75 \cdot 6^2}}{150 \cdot 10^3} = 1 \cdot 10^{-4}\text{m}^3,$$

d'où

$$d = \sqrt[3]{W_x/0{,}1} = \sqrt[3]{0{,}0001/0{,}1} = 0{,}1 \text{ m} = 10 \text{ cm}.$$

§ 82. Calcul des récipients à parois minces

En technique on a souvent affaire aux récipients dont les parois sont sollicitées par la pression des liquides, des gaz et des matières pulvérulentes (chaudières à vapeur, réservoirs, chambres de combustion des moteurs, citernes, etc.). Si ces récipients ont la forme des corps de révolution et l'épaisseur de leurs parois est négligeable, alors que la charge est symétri-

que à l'axe, la détermination des contraintes subies par les parois est très simple.

Dans ces cas on peut admettre sans grande erreur que les parois supportent seulement les contraintes normales (de traction ou de compression) et que ces contraintes sont uniformément réparties suivant l'épaisseur.

Si l'épaisseur de la paroi ne dépasse pas environ 1/10 du rayon minimal de sa courbure, les calculs fondés sur de telles suppositions sont confirmés par l'expérience.

Découpons dans la paroi du récipient un élément de dimensions dl_1 et dl_2 en notant l'épaisseur de la paroi t (fig. IX.16). Les rayons de courbure

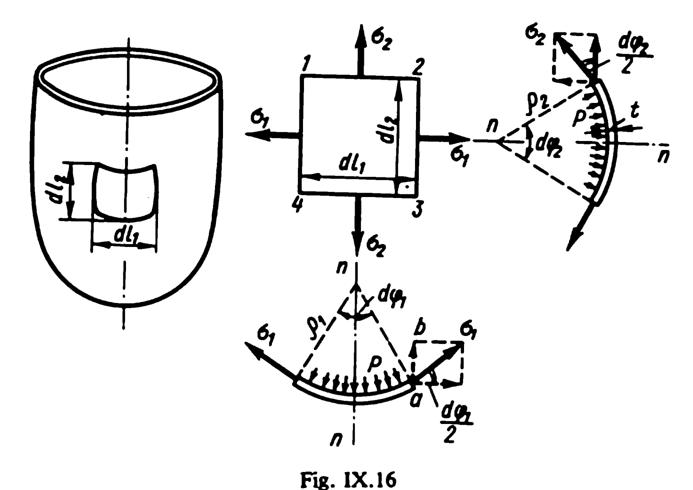


Fig. IX.16

de la surface du récipient à l'endroit donné sont ρ_1 et ρ_2. Faisons subir à l'élément la pression intérieure p normale à sa surface. Remplaçons l'interaction de l'élément avec la partie restante du récipient par les forces inférieures dont l'intensité est σ_1 et σ_2. L'épaisseur des parois étant négligeable, on peut admettre que dans cette épaisseur les contraintes sont réparties uniformément.

Composons la condition d'équilibre et, à cet effet, projetons les forces supportées par l'élément sur la direction de la normale *nn* à la surface. La projection de la charge est égale à $p\,dl_1\,dl_2$. La projection de la contrainte σ_1 sur la direction de la normale est représentée par le segment *ab* égal à $\sigma_1 \sin d\varphi_1/2$.

La projection de l'effort appliqué aux faces *14* (et *23*) vaut $2\sigma_1 t\,dl_2 \times$ $\times \sin d\varphi_1/2$. D'une façon analogue, la projection de l'effort supporté par les faces *12* (et *43*) est $2\sigma_2 t\,dl_1 \sin d\varphi_2/2$.

En projetant toutes les forces appliquées à l'élément extrait sur la direction de la normale *nn*, on obtient

$$p\,dl_1\,dl_2 - 2\sigma_1 t\,dl_2 \sin d\varphi_1/2 - 2\sigma_2 t\,dl_1 \sin d\varphi_2/2 = 0.$$

Etant donné la petitesse des dimensions de l'élément, on peut admettre

$$\sin d\varphi_1/2 \approx d\varphi_1/2 \qquad \text{et} \qquad \sin d\varphi_2/2 \approx d\varphi_2/2.$$

Si on en tient compte, on peut tirer de l'équation d'équilibre

$$p\,dl_1 dl_2 - \sigma_1 t\,dl_2 d\varphi_1 - \sigma_2 t\,dl_1 d\varphi_2 = 0.$$

Retenant que $d\varphi_1 = dl_1/\rho_1$ et $d\varphi_2 = dl_2/\rho_2$, on a

$$p\,dl_1 dl_2 - \sigma_1 dl_1 dl_2\, t/\rho_1 - \sigma_2 dl_1 dl_2\, t/\rho_2 = 0.$$

La réduction par $dl_1 dl_2$ et la division par t amènent

$$\sigma_1/\rho_1 + \sigma_2/\rho_2 = p/t. \qquad \textbf{[IX.44]}$$

Cette formule s'appelle *équation de Laplace*.

Considérons le calcul de deux formes de récipients qui se présentent le plus souvent dans la pratique : sphérique et cylindrique*. Bornons-nous au cas de l'action de la pression intérieure du gaz.

1. *Récipient sphérique.* Dans ce cas, $\rho_1 = \rho_2 = r$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. La formule [IX.44] entraîne que $2\sigma/r = p/t$, d'où

$$\sigma = pr/(2t). \qquad \text{(IX.45)}$$

Etant donné qu'il s'agit de l'état de contrainte plan, le calcul de la résistance impose l'application de telle ou telle théorie de la résistance. Les valeurs des contraintes principales sont les suivantes : $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma$; $\sigma_3 = 0$. D'après la troisième hypothèse, $\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_{adm}$. En portant $\sigma_1 = \sigma$ et $\sigma_3 = 0$, on obtient

$$\sigma = pr/(2t) \leqslant \sigma_{adm},$$

c'est-à-dire que la vérification de la résistance se fait comme dans le cas de l'état de contrainte uniaxial.

En vertu de la quatrième hypothèse, $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leqslant \sigma_{adm}$. Etant donné que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ et $\sigma_3 = 0$, il vient

$$\sigma = pr/(2t) \leqslant \sigma_{adm};$$

la condition est donc la même que celle de la troisième hypothèse.

2. *Récipient cylindrique.* Dans ce cas (fig. IX.17, *a*), $\rho_1 = r$ (rayon du cylindre) et $\rho_2 = \infty$ (rayon de courbure de la génératrice du cylindre).

* Pour le calcul des récipients à parois minces d'autres formes consulter les cours complets de la résistance des matériaux.

L'équation de Laplace entraîne $\sigma_1/r = p/t$, d'où

$$\sigma_1 = pr/t. \qquad \text{(IX.46)}$$

Pour calculer la contrainte σ_2 coupons le récipient par le plan perpendiculaire à son axe et examinons la condition d'équilibre d'une de ses parties (fig. IX.17, *b*).

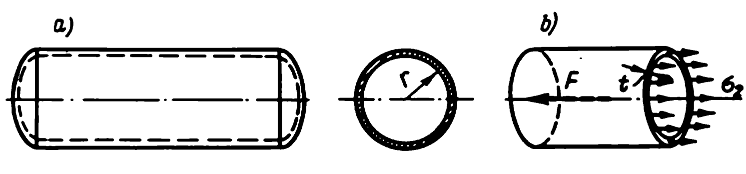


Fig. IX.17

En projetant sur l'axe du récipient toutes les forces appliquées à la partie rejetée, on obtient

$$-F + \sigma_2 2\pi rt = 0,$$

où $F = \pi r^2 p$ est la résultante des forces de pression du gaz sur le fond du récipient. Ainsi, $-p\pi r^2 + \sigma_2 2\pi rt = 0$, d'où

$$\sigma_2 = pr/(2t). \qquad \text{(IX.47)}$$

Notons que les parois de l'anneau qui correspond à la section du cylindre et qui subit l'action de la contrainte σ_2 sont minces, son aire est calculée comme produit de la longueur de la circonférence par l'épaisseur de la paroi.

En comparant σ_1 et σ_2 supportées par un récipient cylindrique, on voit que $\sigma_2 = \sigma_1/2$.

Selon la troisième hypothèse, la condition de la résistance d'un récipient cylindrique s'écrit

$$\sigma_{\text{réd}} = \sigma_1 = pr/t \leqslant \sigma_{\text{adm}}. \qquad \text{(IX.48)}$$

D'après la quatrième hypothèse, cette condition est

$$\sigma_{\text{réd}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leqslant \sigma_{\text{adm}}.$$

En y portant les valeurs de σ_1 et σ_2 tirées des formules (IX.46) et (IX.47), on obtient

$$\sigma_{\text{réd}} = 0{,}86\, pr/t \leqslant \sigma_{\text{adm}}. \qquad \text{(IX.49)}$$

Les résultats fournis par les formules (IX.48) et (IX.49) diffèrent de 14%. Il est donc recommandé d'appliquer la formule établie suivant la quatrième hypothèse.

Exemple IX.7. Déterminer en appliquant la quatrième hypothèse de la résistance l'épaisseur des parois d'une chaudière cylindrique de diamètre $D = 2$ m soumise à une pression intérieure de la vapeur $p = 1\,\text{MPa} = 1000\,\text{kPa}$; $\sigma_{adm} = 100\,\text{MPa} = 100 \cdot 10^3\,\text{kPa}$.

Solution. La formule (IX.49) entraîne

$$t = \frac{0{,}86pr}{\sigma_{adm}} = \frac{0{,}86 \cdot 1000 \cdot 1}{100 \cdot 10^3} = 0{,}86 \cdot 10^{-2}\text{m} = 0{,}86\ \text{cm} = 8{,}6\text{mm}.$$

Adoptons $t = 10$ mm.

Exemple IX.8. Déterminer l'épaisseur des parois d'un réservoir cylindrique prévu pour la conservation d'un liquide de poids spécifique $\gamma = 10\ \text{kN/m}^3$; les dimensions du réservoir

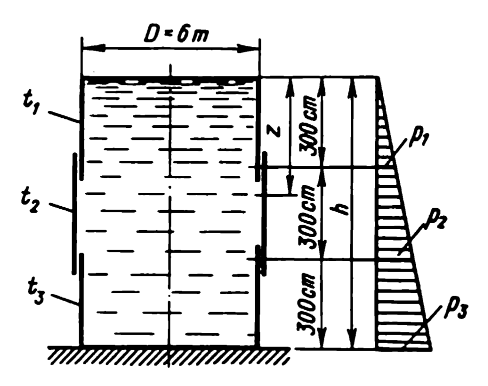


Fig. IX.18

sont données par la figure IX.18. Pour le matériau des parois la contrainte admissible $\sigma_{adm} = 100\,\text{MPa} = 100 \cdot 10^3\text{kPa}$.

Solution. La pression du liquide sur les parois du récipient est proportionnelle à la distance de la surface libre

$$p = \gamma z.$$

Si l'épaisseur des parois est constante, le calcul se fait d'après la pression maximale à sa base:

$$p_{max} = p_3 = \gamma h = 10 \cdot 9 = 90\ \text{kN/m}^2.$$

En vertu de la formule (IX.48), l'épaisseur des parois est

$$t_3 = \frac{90 \cdot 3}{100 \cdot 10^3} = 0{,}27 \cdot 10^{-2}\text{m} = 0{,}27\text{cm} \approx 3\text{mm}.$$

Si les conditions de corrosion permettent une plus petite épaisseur, il convient d'employer des récipients à parois d'épaisseur variable, en les divisant en sections et en calculant l'épaisseur des parois des sections d'après les pressions p_1, p_2 et p_3 (en bas de chaque section).

CHAPITRE X

CALCUL DES BARRES COMPRIMÉES À LA STABILITÉ (FLAMBEMENT)

§ 83. Formes d'équilibre stable et instable

La mécanique rationnelle enseigne que l'équilibre peut être *stable, instable* et *indifférent*. Par exemple, une sphère reposant sur une surface concave est à l'état d'équilibre stable. Si on l'écarte légèrement de cette position pour la lâcher ensuite, elle reprendra sa position initiale (fig. X.1, *a*). Une sphère reposant sur une surface horizontale se trouve à l'état d'équilibre indifférent (fig. X.1, *b*). Déplacée de cette position elle ne reprend pas sa position initiale, mais son mouvement s'arrête. Enfin, une sphère reposant sur une surface convexe se trouve à l'état d'équilibre instable (fig. X.1, *c*). Repoussée de sa position, elle continue à se déplacer.

Des exemples analogues peuvent être également donnés par le domaine de l'équilibre des corps subissant la déformation. Ainsi, sous l'action d'une force comprimante axiale relativement peu grande (inférieure à une certaine valeur critique) une barre longue garde l'équilibre stable (fig. X.2, *a*). Si on la fléchit légèrement en appliquant une charge transversale ensuite supprimée, la barre reprend sa position droite, revient à la forme d'équilibre initiale.

Dans ces conditions, la forme d'équillibre incurvée s'avère instable et donc impossible.

Lorsque la force comprimante atteint une certaine valeur dépassant la valeur critique définie, la forme rectiligne d'équilibre devient instable et est remplacée par la forme curviligne qui dans ces conditions devient stable (fig. X.2, *c*).

La valeur minimale de la force comprimante à laquelle la barre perd sa propriété de garder la forme d'équilibre rectiligne s'appelle *force critique* et se note F_{cr} (fig. X.2, *b*).

Euler définit la force critique comme la *force nécessaire pour qu'une colonne s'incline de la plus petite valeur possible.*

Le schéma envisagé de la barre sollicitée à la compression centrale a un caractère quelque peu spéculatif. En pratique, il faut prendre en compte le fait que la compression peut être légèrement excentrée, alors que la barre

peut être initialement légèrement fléchie. C'est pourquoi dès le début de la sollicitation longitudinale d'une barre on observe son flambement.

Les recherches ont permis d'établir que lorsque l'effort de compression est inférieur à sa valeur critique, les flèches de la barre sont peu importantes, mais avec l'approche de cette valeur, elles commencent à croître indéfiniment (fig. X.2, *c*).

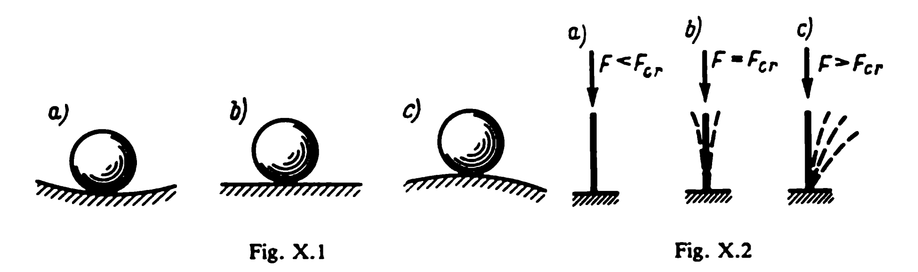


Fig. X.1 Fig. X.2

Cette croissance illimitée des flèches sous l'action de la croissance limitée de l'effort de compression peut être adoptée comme critère de la perte de stabilité.

Après avoir déterminé la force critique, il faut établir pour une barre comprimée la *charge admissible*. Naturellement, dans des buts de sécurité celle-ci doit être inférieure à la charge critique :

$$F_{adm} = F_{cr}/n_s, \qquad [X.1]$$

où n_s est le *coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité*.

Le coefficient de sécurité par rapport à la stabilité est retenu tel que soit assuré le service sans aléas de la barre, malgré les conditions réelles de son service qui peuvent être moins favorables que celles envisagées par le calcul (par suite de l'hétérogénéité des matériaux, de l'imprécision du calcul des charges, etc.). A cet effet, le coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité est choisi légèrement plus grand que le coefficient de sécurité à la résistance, pour tenir compte des circonstances défavorables complémentaires que sont la courbure initiale de la barre, l'application excentrée éventuelle de la charge, etc.

Pour l'acier, le coefficient n_s est établi par les normes dans les limites de 1,8 à 3 ; pour la fonte, de 5 à 5,5 ; pour le bois, de 2,8 à 3,2. Ces valeurs sont adoptées pour le calcul des structures des constructions. Les valeurs de n_s retenues pour le calcul des éléments des constructions mécaniques (par exemple, pour les machines-outils) sont plus grandes; ainsi, dans le cas de l'acier n_s = 4 à 5. Pour mieux tenir compte des conditions de service concrètes des barres comprimées, il est recommandé d'employer non pas un coefficient global, mais un système de coefficients particuliers, tout comme dans le calcul à la résistance.

La perte de stabilité de l'équilibre élastique, qui a été à l'origine de nombreux accidents des constructions, est également possible dans le cas de la torsion, de la flexion et des déformations composées.

§ 84. Formule d'Euler pour la force critique

Considérons une barre comprimée à l'état critique lorsque la force de compression atteint la valeur critique, c'est-à-dire admettons que la barre soit légèrement incurvée (fig. X.3). Si les moments d'inertie par rapport

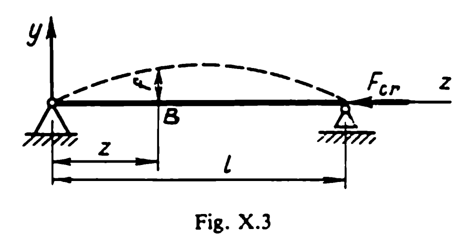


Fig. X.3

aux deux axes centraux principaux de la section droite ne sont pas égaux entre eux, le flambement se produit dans le plan de la rigidité minimale lorsque les sections droites de la barre tournent autour de l'axe par rapport auquel la valeur du moment d'inertie est minimale. Il est facile de le voir en comprimant une règle flexible.

Pour étudier le flambement et déterminer la force critique, faisons appel à l'équation différentielle approchée de l'axe fléchi d'une poutre (cf. § 58)

$$EI_{\min}f'' = M. \tag{X.2}$$

Le moment fléchissant par rapport au centre de gravité de la section B à l'état fléchi

$$M = -F_{cr}f. \tag{X.3}$$

Le signe moins est pris du fait que la barre est fléchie par la convexité en haut, alors que la flèche f est positive. Si elle était fléchie en bas, le moment serait positif, mais les flèches f seraient négatives, et nous aurions le même résultat (X.3). Compte tenu de (X.3), l'équation (X.2) s'écrit

$$EI_{\min}f'' = -F_{cr}f.$$

En introduisant la notation $\alpha^2 = F_{cr}/(EI_{\min})$, on obtient

$$f'' + \alpha^2 f = 0. \tag{X.4}$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. Les mathématiques enseignent que sa solution générale est de la forme

$$f = C\cos\alpha z + D\sin\alpha z. \tag{X.5}$$

Ici C et D sont des constantes d'intégration, dont le calcul implique les conditions connues aux extrémités de la barre : 1) pour $z = 0$, $f = 0$; 2) pour $z = l$, $f = 0$.

La première condition permet d'obtenir $C = 0$. Donc, la barre est fléchie suivant la sinusoïde $f = D \sin \alpha z$. La deuxième condition amène $D \sin \alpha l = 0$. Cette relation est valable dans deux cas.

1-er cas. $D = 0$. Mais si $C = 0$ et $D = 0$, en vertu de (X.5), les flèches de la barre sont nulles, ce qui contredit la prémisse initiale.

2-e cas. $\sin \alpha l = 0$. Cette condition est observée lorsque αl prend les valeurs de la série infinie suivante : $\alpha l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$, où n est un nombre entier quelconque. On en tire $\alpha = n\pi/l$, et puisque $\alpha = \sqrt{F_{cr}/(EI_{min})}$, alors $F_{cr} = \pi^2 I_{min} E n^2/l^2$. De la sorte, on obtient un ensemble infini des valeurs des forces critiques associées aux formes différentes de la courbure de la barre.

Du point de vue de la pratique, ce n'est que la valeur minimale de la force critique à laquelle la barre perd sa stabilité qui présente de l'intérêt.

Lorsque $n = 0$, le problème n'a pas de solution. Avec $n = 1$, on obtient la force critique minimale

$$F_{cr} = \pi^2 EI_{min}/l^2. \qquad [X.6]$$

C'est ce qu'on appelle justement *formule d'Euler*.

A la force critique définie d'après cette formule correspond la flèche de la barre suivant une sinusoïde à une demi-onde :

$$f = D \sin \frac{\pi}{l} z.$$

Les racines qui suivent donnent de grandes valeurs de la force critique et nous ne les examinerons pas. La flèche de la barre qui leur correspond est une sinusoïde à plusieurs demi-ondes ; elle s'obtient lorsque la flèche suivant la sinusoïde à une demi-onde est pour quelques raisons impossible, par exemple, par suite de la présence des liaisons intermédiaires.

Il faut porter l'attention sur ce que la constante D et, donc, la forme de l'axe incurvé restent indéterminées.

Si pour l'exploration du flambement on applique non pas une équation différentielle approchée, mais l'équation exacte de l'axe fléchi (VII.3), il s'avère possible de calculer en plus de la valeur de la force critique la relation entre la force de compression et la flèche de la barre.

§ 85. Influence de la fixation des extrémités de la barre sur la force critique

Le plus souvent la fixation des extrémités d'une barre est réalisée suivant l'un des quatre modes visualisés sur la figure X.4. Le deuxième mode,

la fixation articulée des deux extrémités, a été examiné en déduisant la formule d'Euler.

Pour les autres modes de fixation la formule généralisée d'Euler de calcul de la charge critique s'écrit

$$F_{cr} = \pi^2 EI_{min}/(\mu l)^2, \qquad [X.7]$$

où μ est le *coefficient de réduction de la longueur* de la barre (coefficient de Yassinski), qui dépend du mode de fixation des extrémités (fig. X.4) ; $l_{réd} = \mu l$, la longueur réduite de la barre.

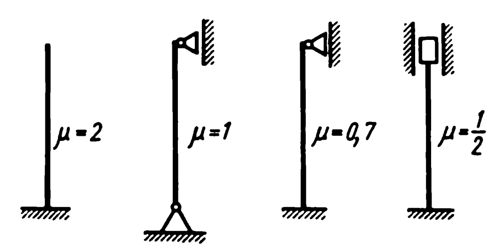


Fig. X.4

La formule [X.7] s'obtient si l'on considère l'équation différentielle du flambement

$$f^{IV} + \alpha^2 f'' = 0,$$

qui se déduit de l'équation (X.4) après une double différentiation. La solution de cette équation est de la forme

$$f = K \sin \alpha z + B \cos \alpha z + Cz + D.$$

Les constantes K, B, C, D sont déterminées à partir des conditions aux limites. Par exemple, pour le troisième cas de la fixation (fig. X.4), lorsque l'origine des coordonnées se trouve à l'extrémité inférieure (l est la longueur de la barre), on a

$$1)\ f_{z=0} = 0\ ; \quad 2)\ f'_{z=0} = 0\ ; \quad 3)\ f_{z=l} = 0\ ;$$
$$4)\ M_{z=l} = EIf''_{z=l} = 0 \text{ ou } f''_{z=l} = 0.$$

En utilisant ces conditions, on obtient

$$B + D = 0\ ; \quad K\alpha + C = 0\ ; \quad K \sin \alpha l + B \cos \alpha l + Cl + D = 0\ ;$$

$$K \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0.$$

Les mathématiques enseignent qu'un système d'équations homogènes (sans termes constants) possède une solution non nulle si son déterminant

est nul :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & l & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En calculant ce déterminant, on obtient tg $\alpha l = \alpha l$. La racine minimale de cette équation, différente de zéro, $\alpha l = 4{,}49$; donc

$$F_{cr} = 4{,}49^2 \cdot EI/l^2 \approx \pi^2 EI/(0{,}7l)^2.$$

Ainsi, $\mu \approx 0{,}7$.

Les valeurs des coefficients données par la figure X.4 pour d'autres modes de fixation des extrémités s'obtiennent d'une façon analogue.

Comme le montre la formule [X.7], plus μ est petit, plus la charge critique, et donc admissible, est grande. Par exemple, la charge d'une barre encastrée à ses deux extrémités peut être 16 fois plus grande que celle d'une barre encastrée seulement à l'une des extrémités. C'est pourquoi, si possible, il faut assurer un encastrement rigide des deux extrémités. Or, ceci n'est pas toujours réalisable. Les éléments auxquels se fixent les extrémités sont toujours plus ou moins élastiques, déformables, ce qui rend le calcul quelque peu indéterminé. Il s'ensuit que même pour des extrémités encastrées rigides sur d'autres éléments, le calcul du coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité est conduit en supposant que les deux extrémités sont articulées.

§ 86. Limites d'application de la formule d'Euler

La *formule d'Euler n'est pas toujours utilisable*. Nous avons recouru pour la déduire à l'équation différentielle de la ligne élastique établie sur la base de la loi de Hooke. Or, celle-ci n'est valable que si les contraintes ne dépassent pas la limite de proportionnalité.

Pour établir les limites d'application de la formule d'Euler, déterminons la *contrainte critique* σ_{cr}, subie par la section droite de la barre sous une charge critique

$$\sigma_{cr} = F_{cr}/A = \pi^2 EI_{min}/[(\mu l)^2 A], \qquad (X.8)$$

où A est l'aire de la section droite.

Mais $i_{min} = \sqrt{I_{min}/A}$ est le rayon de giration minimal de la section droite. Aussi, la formule (X.8) peut-elle s'écrire

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E/(\mu l/i_{min})^2.$$

La quantité $\mu l/i_{\min}$ définit l'influence des dimensions de la barre et du mode de fixation de ses extrémités : elle est notée λ et s'appelle *élancement de la barre.* L'élancement est une quantité sans dimension.

Ainsi, en introduisant la notation $\lambda = \mu l/i_{\min}$, il vient

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2.$$

Pour rendre la formule d'Euler utilisable, il faut observer la condition suivante :

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2 \geqslant \sigma_{pr}, \tag{X.9}$$

où σ_{pr} est la limite de proportionnalité du matériau de la barre.

En écrivant la formule (X.9) par rapport à l'élancement, on obtient la condition d'applicabilité de la formule d'Euler sous la forme

$$\lambda \geqslant \sqrt{\pi^2 E/\sigma_{pr}}. \qquad \text{[X.10]}$$

Par exemple, pour l'acier Cт3, $\sigma_{pr} = 200$ MPa et

$$\lambda \geqslant \sqrt{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5/200} \geqslant 100.$$

Ainsi, *pour les barres en acier à bas carbone la formule d'Euler est applicable si leur élancement est supérieur à* 100. D'une façon analogue, on obtient les conditions d'application de la formule d'Euler pour la fonte : $\lambda \geqslant 80$. Pour les aciers à carbone moyen et à haut carbone, ainsi que pour les aciers alliés, la formule d'Euler peut s'employer lorsque l'élancement est inférieur à celui qui a été indiqué. Ainsi, pour les barres en acier à chrome-molybdène la formule d'Euler est applicable lorsque $\lambda \geqslant 70$.

§ 87. Formules empiriques des contraintes critiques

Si, comme c'est souvent le cas dans la pratique, l'élancement des barres est inférieur aux valeurs indiquées, la formule d'Euler devient inapplicable, les contraintes critiques dépassant la limite de proportionnalité et la loi de Hooke se trouvant invalidée.

Il existe des méthodes théoriques approchées de la détermination des forces critiques lors de la perte de stabilité au stade non élastique, mais leur examen dépasse le cadre de notre cours. Dans ce cas on recourt généralement à la formule empirique de Tetmayer-Yassinski établie sur la base de nombreuses expériences :

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \qquad \text{[X.11]}$$

où a et b sont les coefficients définis par le matériau. Pour l'acier Cт 3 et les élancements $\lambda = 40$ à 100, les coefficients a et b peuvent être $a = 310$ MPa ; $b = 1{,}14$ MPa.

Lorsque les élancements $\lambda < 40$, les barres peuvent se calculer sans tenir compte du danger que présente le flambement.

§ 88. Formule pratique de la stabilité

Au lieu de deux formules (d'Euler et de Yassinski) dont chacune convient pour une marge définie des élancements, il est plus commode de disposer d'une formule qui serait utilisable quel que soit l'élancement de la barre. Cette formule pratique largement appliquée dans le calcul des structures des constructions est de la forme

$$F_{adm} = \varphi \sigma^{c}_{adm} A, \qquad [X.12]$$

où σ^{c}_{adm} est la contrainte admissible principale à la compression ; φ, le facteur de réduction de la contrainte admissible principale (ou *coefficient de flambement*). La quantité φ dépend du matériau et de l'élancement de la barre. Ses valeurs sont consignées sur le tableau X.1 ; A est l'aire de la section droite.

Tableau X.1

Elancement, λ	φ pour				
	aciers Cт 1, Cт 2, Cт 3, Cт 4	acier Cт 5	aciers de qualité accrue, $\sigma_{e} \geq 320$ MPa	fonte	bois
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

La quantité $\varphi \sigma^{c}_{adm}$ peut être envisagée comme la contrainte admissible à la stabilité, c'est-à-dire

$$\sigma^{s}_{adm} = \varphi \sigma^{c}_{adm}. \qquad (X.13)$$

La contrainte admissible principale à la compression σ^{c}_{adm} est, comme on le sait [cf. formule (II.17)],

$$\sigma^{c}_{adm} = \sigma_u/n,$$

où σ_u est la contrainte limite égale à la limite d'écoulement des matériaux plastiques ou à la charge de rupture des matériaux fragiles.

La relation entre le coefficient φ, la contrainte critique σ_{cr}, la contrainte limite σ_u, les coefficients de sécurité n et de stabilité n_s peut être établie de la façon suivante :

$$\sigma^{s}_{adm} = \varphi\sigma^{c}_{adm} = \sigma_{cr}/n_s, \qquad (X.14)$$

d'où

$$\varphi = \sigma_{cr}/\sigma^{c}_{adm}n_s. \qquad (X.15)$$

En utilisant la formule (II.17), on obtient

$$\varphi = \sigma_{cr}n/(\sigma_u n_s). \qquad (X.16)$$

Pour le choix d'une section, la formule [X.12] est ramenée à la forme

$$A = F_{adm}/(\varphi\sigma^{c}_{adm}).$$

A cet effet, il faut se donner la valeur de φ du fait que l'élancement λ est inconnu, l'aire de la section A étant inconnue et l'élancement dépendant de cette dernière. Comme première approximation, il est recommandé de prendre $\varphi_1 = 0,5$. Ensuite, on calcule les quantités A, I_{min}, i_{min}, λ pour trouver d'après le tableau X.1 la valeur correspondante de φ_1'.

Si la différence entre φ_1 et φ_1' est importante, il convient de reprendre le calcul en se donnant une nouvelle valeur de φ_2 :

$$\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi_1')/2,$$

etc., tant que la différence entre les valeurs successives ne dépasse pas 4 à 6 %.

Pour les barres dont les sections sont sensiblement affaiblies (par des trous, par exemple), en plus du calcul à la stabilité il faut réaliser le calcul à la résistance usuel d'après la formule

$$\sigma = F/A_{nt} \leqslant \sigma^{c}_{adm},$$

où A_{nt} est l'aire active de la section de la barre.

Pour ce qui est du calcul à la stabilité, on prend l'aire totale A_{br} de la section.

Dans certains cas, par exemple dans le calcul des éléments des constructions mécaniques, les valeurs des coefficients de sécurité vis-à-vis de la stabilité n_s prévues par les tableaux des coefficients φ ($n_s \approx 1,8$) sont insuffisantes. Le calcul doit se faire en partant directement du coefficient n_s

imposé et en appliquant la formule d'Euler ou de Yassinski. Il convient de procéder de la même façon pour le calcul à la stabilité des barres en matériaux ne figurant pas dans le tableau des coefficients φ.

§ 89. Formes rationnelles des sections des barres comprimées

Pour la charge, la longueur de la barre et les contraintes admissibles données, la forme et les dimensions de la section droite comprimée sont déterminées par le *rayon de giration*

$$i_{min} = \sqrt{I_{min}/A}.$$

Le rayon de giration i est une quantité à dimension. Pour comparer les sections différentes le plus commode est d'employer la quantité adimensionnelle

$$\rho_{min} = i_{min}/\sqrt{A} = \sqrt{I_{min}}/A, \qquad (X.17)$$

nommée *rayon de giration spécifique*.

Ci-dessous sont données les valeurs de ρ_{min} pour certaines sections les plus usitées :

Type de la section	ρ_{min}
Rectangle avec $h/b = 2$	0,204
Carré	0,289
Cercle	0,36
Poutre en H	0,27 à 0,41
Poutre en U	0,38 à 0,45
Cornières à ailes égales	0,4 à 0,6
Anneau avec $c = 0,7$ à 0,9	0,86 à 1,53

On voit que les moins avantageuses sont les sections pleines rectangulaires, dont les moments d'inertie par rapport aux axes principaux ne sont pas égaux entre eux et, par suite, le principe d'égale stabilité de la barre dans les deux plans d'inertie principaux n'est pas observé. Les plus favorables sont les sections annulaires et en caisson à parois minces. Le calcul montre que le remplacement des sections comprimées en forme des cornières et en H par des barres tubulaires donne une économie en matériau de 20 à 40 %.

Exemple X.1. Choisir la section en H d'une barre comprimée à extrémités articulées si la force appliquée $F = 0,5$ MN. La longueur de la barre est de 2 m. La contrainte admissible principale $\sigma^c_{adm} = 160$ MPa.

Solution. Retenons en première approximation $\varphi_1 = 0,5$ pour obtenir

$$A = F/(\varphi_1 \sigma^c_{adm}) = 0,5/(0,5 \cdot 160) = 0,00625 \text{ m}^2 = 62,5 \text{ cm}^2.$$

Choisissons dans les tableaux des normes (GOST 8239-72) la poutre en H n° 36 telle que $A = 61,9 \text{ cm}^2$.

Le rayon de giration minimal tiré de ce même tableau : $i_{min} = i_t = 2,89$ cm. L'élancement de la barre $\lambda = \mu l/i_{min} = 1 \cdot 200/2,89 = 69,5 \approx 70$.

D'après le tableau X.1, le coefficient φ pour l'acier Cт 3 avec $\lambda = 70$ est $\varphi_1' = 0,81$. La différence entre φ_1 et φ_1' étant importante, reprenons le calcul en adoptant

$$\varphi_2 = (0,5 + 0,81)/2 \cong 0,65.$$

Alors,

$$A = 0,5/(0,65 \cdot 160) = 0,0048 \text{ m}^2 = 48 \text{ cm}^2.$$

Retenons la poutre en H n° 30 pour laquelle $A = 46,5 \text{ cm}^2$; $i_t = 2,69$ cm. L'élancement de la barre

$$\lambda = \mu l / i_{min} = 200/2,69 \approx 75.$$

Le coefficient φ (cf. tableau X.1) se trouve (en interpolant les valeurs qui correspondent à $\lambda = 70$ et $\lambda = 80$) égal à $\varphi_2' \approx 0,78$.

La contrainte subie par la section droite de la barre est alors

$$\sigma = F/A = 0,5/(46,5 \cdot 10^{-4}) = 108 \text{ MPa}.$$

Or, la contrainte admissible dans le calcul à la stabilité

$$\sigma^s_{adm} = \varphi_2' \sigma^c_{adm} = 0,78 \cdot 160 \cong 122,5 \text{ MPa}.$$

L'insuffisance de la contrainte est $(122,5 - 108) \cdot 100/122,5 = 11,8$ %.

Réalisons encore une approximation. Adoptons $\varphi_3 = (0,78 + 0,65)/2 = 0,72$ pour obtenir $A = 0,5/(0,72 \cdot 160) = 0,00435 \text{ m}^2 = 43,5 \text{ cm}^2$.

Retenons la poutre en H n° 27 pour laquelle $A = 40,2 \text{ cm}^2$; $i_t = 2,54$ cm. L'élancement de la barre $\lambda = 200/2,54 = 79$. Les tableaux donnent : $\varphi_3' = 0,75$.

La contrainte $\sigma = 0,5/(40,2 \cdot 10^{-4}) = 125$ MPa.

La contrainte admissible $\varphi_3' \sigma^c_{adm} = 0,75 \cdot 160 = 120$ MPa.

L'excès de contrainte $(125—120) \cdot 100/120$ % $= 4,2$ %, ce qui est admissible.

Exemple X.2. Choisir les dimensions de la section annulaire pour les mêmes données que dans l'exemple précédent. Le rapport entre le diamètre intérieur et le diamètre extérieur du tube est $c = d/D = 0,9$. Comparer l'aire de la section annulaire avec celle de la poutre en H retenue dans l'exemple précédent.

Réponse. $D = 14,5$ cm ; $d = 13$ cm ; $A = 32 \text{ cm}^2$. Par rapport à la section en H l'économie du matériau est de $(46,4 — 32) \cdot 100/46,4 = 31$ %.

Exemple X.3. Calculer la charge admissible de la barre comprimée en acier Cт 3 de section rectangulaire 4 × 6 cm. Les extrémités de la barre sont articulées. Longueur de la barre $l = 80$ cm. Coefficient de stabilité requis $n_s = 3$.

Solution. Puisque le coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité est donné, le calcul se fait directement d'après la formule d'Euler où de Yassinski. Pour établir laquelle de ces deux formules doit être utilisée, calculons l'élancement de la barre : $\lambda = \mu l / i_{min}$, où $i_{min} = \sqrt{I_{min}/A} = \sqrt{b^3 h/(12\, bh)} = \sqrt{b^3/12} = \sqrt{4^2/12} = 1,15$ cm; $\lambda = 1 \cdot 80/1,15 = 69,5$.

L'élancement est inférieur à 100, c'est-à-dire pour une barre en acier à bas carbone la formule d'Euler est inapplicable. Donc, le calcul doit se faire d'après la formule de Yassinski

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{n_s} = \frac{\sigma_{cr} A}{n_s} = \frac{(a - b\lambda)A}{n_s} = \frac{(310 - 1,14 \cdot 69,5)4 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{3} = 0,18 \text{ MN}.$$

§ 90. Flambement avec flexion simple

Considérons encore l'action simultanée sur la barre de la force appliquée suivant l'axe et de la charge transversale (fig. X.5). Sous l'action des charges de ce type la barre se déforme comme l'indique le pointillé du des-

sin. Si les déformations sont faibles devant les dimensions de la section, les contraintes dans la barre peuvent être déterminées par le principe de l'indépendance de l'effet des forces, c'est-à-dire isolément pour la charge longitudinale qui provoque le flambement d'après la formule

$$\sigma_1 = -F/A \qquad \text{(X.18)}$$

et isolément pour la charge transversale qui provoque la flexion d'après la formule

$$\sigma_2 = \pm M_0/W_x, \qquad \text{(X.19)}$$

où M_0 est le moment fléchissant dû seulement à la charge transversale.

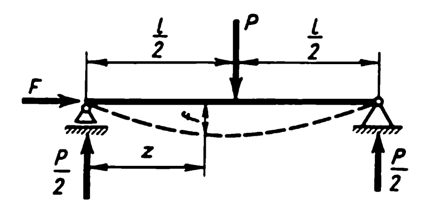


Fig. X.5

Les contraintes globales sont données par la formule connue

$$\sigma = -F/A \pm M_0/W_x. \qquad \text{(X.20)}$$

Pourtant, avec la croissance de l'élancement de la barre on ne peut déjà plus négliger l'influence de la flèche sur la croissance du moment fléchissant sous l'action de la force normale.

Le problème de la détermination des déformations et des efforts internes en flambement avec flexion simple peut avoir une solution exacte et approchée.

Examinons la solution exacte (fig. X.5). En considérant des déformations faibles, utilisons l'équation différentielle d'une barre fléchie (X.2). Composons l'équation de la flexion seulement pour la moitié gauche de la barre étant donné qu'elle est symétrique :

$$EI_x f'' = M = -Ff - Pz/2 \qquad \text{(X.21)}$$

ou $f'' + \alpha^2 f = -Pz/(2EI_x)$, où

$$\alpha^2 = F/EI_x. \qquad \text{(X.22)}$$

La solution de cette équation différentielle comprend la solution de l'équation sans le deuxième membre $f = B \sin \alpha z + C \cos \alpha z$ et la solution particulière de l'équation non homogène. On vérifie sans peine par substitution que la solution particulière est de la forme $f^* = -Pz/(2F)$. Ainsi,

$$f = B \sin \alpha z + C \cos \alpha z - Pz/(2F) \,;$$

$$f' = B\alpha \cos \alpha z - C\alpha \sin \alpha z - P/(2F).$$

Pour calculer les constantes B et C, on a les conditions suivantes :

$$1)\, f_{z=0} = 0\,; \qquad 2)\, f'_{z=l/2} = 0.$$

On tire de la première condition que $C = 0$, et de la deuxième, que $B = P/(2F\alpha \cos \alpha l/2)$. Donc,

$$f = \frac{P}{2\alpha F \cos \alpha l/2} \sin \alpha z - Pz/(2F). \qquad \text{(X.23)}$$

La flèche maximale

$$f_{\substack{\max \\ (z = l/2)}} = \frac{P}{2\alpha F}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right). \qquad \text{(X.24)}$$

L'équation des angles de rotation

$$f' = \frac{P}{2F \cos \alpha l/2}\left(\cos \alpha z - \cos \frac{\alpha l}{2}\right);$$

$$f'_{\max} = \frac{P(1 - \cos \alpha l/2)}{2F \cos \alpha l/2} \quad (\text{pour } z = 0). \qquad \text{(X.25)}$$

L'équation de la courbure

$$f'' = -P\alpha \sin \alpha z/(2F \cos \alpha l/2).$$

L'équation des moments fléchissants

$$M = EIf'' = -\frac{EIP\alpha \sin \alpha z}{2F \cos \alpha l/2} = -\frac{P \sin \alpha z}{2\alpha \cos \alpha l/2}.$$

Le moment fléchissant maximal (avec $z = l/2$)

$$M_{\max} = -\frac{P}{2\alpha} \operatorname{tg} \alpha l/2. \qquad \text{(X.26)}$$

Les contraintes maximales engendrées par la compression et la flexion

$$\sigma = -F/A - M/W_x = -F/A - [P/(2\alpha)] \operatorname{tg} \alpha l/2. \qquad \text{(X.27)}$$

Ces formules montrent qu'à mesure que $\alpha l/2$ s'approche de la valeur $\pi/2$, les flèches et les contraintes tendent vers l'infini, c'est-à-dire que la barre perd sa stabilité. La force critique qui correspond à cet état de choses :

$$F_{cr} = \pi^2 EI_x/l^2,$$

s'appelle parfois *force critique d'Euler*.

Il en est ainsi lorsque à l'instant de la perte de stabilité les contraintes ne dépassent pas la limite de proportionnalité (par exemple, sous une faible charge transversale). Lorsque la charge transversale est plus importante, le pouvoir portant de la barre s'épuise une fois que les contraintes aux points

les plus dangereux atteignent la limite d'écoulement. C'est pourquoi la détermination de la charge critique d'une barre sollicitée au flambement avec flexion dans le plan de l'action de la charge transversale impose l'étude des déformations élastiques et plastiques, ce qui dépasse le cadre de notre cours.

Dans le cas d'une charge composée il faut établir et intégrer l'équation (X.21) pour chaque tronçon de la poutre. Le nombre de constantes d'intégration est alors égal au double nombre de tronçons. Le volume de calcul devient sensiblement plus grand. Dans de tels cas on emploie d'habitude la méthode de calcul approchée.

Lorsque la charge est symétrique ou proche de la symétrie par rapport au milieu de la poutre, les flèches se calculent d'après la formule

$$f = f_0 C, \qquad \text{(X.28)}$$

où f_0 est la flèche due à la charge transversale ; C, le coefficient de correction :

$$C = 1/(1 - F/F_{cr}) \qquad \text{(X.29)}$$

(ici F_{cr} est la force critique).

Si la flèche de la poutre au niveau de la section est connue, les contraintes maximales sont

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_0 + M_f}{W_x} = \frac{F}{A} - \frac{M_0}{W_x} - \frac{F_0}{W_x(1 - F/F_{cr})}, \qquad \text{(X.30)}$$

où M_0 est le moment fléchissant dans la section dû à la charge transversale ; $M_f = Ff$, le moment fléchissant dans la section dû à la force axiale.

Les formules (X.27) ou (X.30) entraînent que les contraintes augmentent plus vite que les charges. En effet, si on admet que la croissance des charges transversale et axiale est proportionnelle à celle de l'un quelconque paramètre, disons, de n fois, alors f_0 augmente également de n fois, et le dernier terme de la formule (X.30) augmente non pas proportionnellement à n, mais bien plus vite. C'est pourquoi dans le cas de flambement avec flexion simple le calcul à la résistance ne peut pas se faire d'après les contraintes admissibles. Il doit se faire d'après les *charges limites*, en déterminant les valeurs des forces qui poussent la contrainte au point dangereux de la section droite jusqu'à la limite d'écoulement. En divisant cette valeur par le coefficient de sécurité imposé, on trouve la charge admissible.

En vérifiant la barre à la résistance, on détermine le coefficient de sécurité réel et on le compare à sa valeur imposée. Le calcul du coefficient de sécurité réel se fait en admettant que la formule (X.30) soit valable jusqu'au début de l'écoulement, et au cours de l'augmentation des forces extérieures la relation entre les charges transversale et longitudinale ne change pas. (La sollicitation de cette forme est dite simple.) En vertu de la formule (X.30), ces prémisses permettent d'écrire :

$$\sigma_{\acute{e}} = F_n/A + M_0 n/W_x + Fnf_0 n/[W_x(1 - nF/F_{cr})], \qquad \text{(X.31)}$$

où n est le nombre qui montre de combien de fois doivent augmenter les forces extérieures pour que les contraintes au point dangereux deviennent égales à la limite d'écoulement ; autrement dit, c'est le *coefficient de sécurité réel suivant les charges*. En appliquant la formule (X.31) et en résolvant l'équation du deuxième degré correspondante, on trouve n.

Au lieu de la formule approchée (X.31) on peut utiliser une formule plus exacte obtenue en partant de (X.27) :

$$\sigma_é = \frac{F_n}{A} + \frac{Pn}{2\sqrt{Fn/(EI)}} \operatorname{tg} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{Fn}{EI}}\right). \qquad (X.32)$$

Le coefficient de sécurité n se détermine en appliquant cette formule par approximations successives.

En plus du calcul à la résistance, les barres soumises à la compression et à la flexion se calculent, d'après les formules des §§ 84 à 88, à la rigidité, ainsi qu'au flambement dans le plan de l'action de la charge transversale.

Exemple X.4. Vérifier à la résistance et à la rigidité la poutre représentée sur la figure X.5, compte tenu du poids propre et des données suivantes : c'est une poutre en H n° 18a à $A = 25{,}4\cdot 10^{-4}$ m², $W_x = 159\cdot 10^{-6}$ m³, $I_x = 1430\cdot 10^{-8}$ m⁴, $l = 4$ m, $\sigma_é = 240$ MPa ; la charge transversale $P = 5$ kN ; la charge axiale $F = 0{,}2$ MN ; le poids de 1 m de la poutre = 199 N ; le coefficient de sécurité admissible $n_{adm} = 1{,}7$; la flèche admissible $f_{adm} = l/400$.

Solution. 1. *Calcul à la résistance.* La charge étant symétrique par rapport au milieu de la poutre, appliquons la solution approchée. En utilisant les formules de la poutre du chapitre VI, calculons le moment fléchissant maximal (au milieu de la travée) dû à la charge transversale et résultant :

de la force concentrée

$$M_f = Pl/4 = 5\cdot 4/4 = 5 \text{ kN}\cdot\text{m} ;$$

du poids propre

$$M_q = ql^2/8 = 199\cdot 4^2/8 = 398 \text{ N}\cdot\text{m} = 0{,}398 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Le moment fléchissant global :

$$M_{tot} = 5 + 0{,}398 = 5{,}398 \text{ kN}\cdot\text{m} = 5{,}398\cdot 10^{-3} \text{ MN}\cdot\text{m}.$$

Si l'on ne tient pas compte du moment produit par la force axiale F, les contraintes maximales sont

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_{tot}}{W_x} = -\frac{0{,}2}{25{,}4\cdot 10^{-4}} - \frac{5{,}398\cdot 10^{-3}}{159\cdot 10^{-6}} = -78{,}8 - 33{,}9 = -112{,}7 \text{ MPa}.$$

Calculons maintenant les contraintes engendrées par le moment complémentaire dû à l'action de la force axiale. A cet effet, déterminons la flèche maximale provoquée par la charge transversale en utilisant les formules du chapitre VII et résultant

de la force concentrée $f_f = Pl^3/(48EI_x)$;

de la charge uniformément répartie $f_q = 5\,ql^4/(384\,EI)$;

la flèche globale

$$f_{tot} = \frac{l^3}{48EI_x}\left(P + \frac{5}{8}ql\right) =$$

$$= \frac{4^3}{48\cdot 2\cdot 10^5\cdot 1430\cdot 10^{-8}}\left(5\cdot 10^{-3} + \frac{5}{8}199\cdot 10^{-6}\cdot 4\right) = 0{,}256\cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

La force critique d'Euler

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} = \frac{3{,}14^2\cdot 2\cdot 10^5\cdot 1430\cdot 10^{-8}}{4^2} = 1{,}756\ \text{MN}.$$

Le coefficient de correction

$$C = 1/(1 - F/F_{cr}) = 1/(1 - 0{,}2/1{,}756) = 1{,}05.$$

Les contraintes supplémentaires produites par le moment engendré par l'action de la force axiale F

$$\sigma = -Ff_0C/W_x = 0{,}2\cdot 0{,}256\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}05/(159\cdot 10^{-6}) = -3{,}4\ \text{MPa}.$$

Les contraintes globales

$$\sigma = -112{,}7 - 3{,}4 = -116{,}1\ \text{MPa}.$$

Le coefficient de sécurité est établi d'après la formule (X.31) par approximations successives : $n = 1{,}90 > n_{adm}$. Par conséquent, la résistance de la poutre est assurée.

2. *Calcul à la rigidité*. La flèche maximale

$$f = f_0C = 0{,}256\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}05 = 0{,}269\cdot 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}269\ \text{cm}.$$

La flèche admissible

$$f_{adm} = l/400 = 400/400 = 1\ \text{cm}.$$

Donc, $f < f_{adm}$, c'est-à-dire que la rigidité de la poutre est assurée.

§ 91. Méthode énergétique de la détermination des charges critiques

En résolvant de nombreux problèmes de stabilité, surtout dans des cas complexes, les méthodes énergétiques, parmi lesquelles nous examinerons une seule, sont très efficaces.

Lorsque la force axiale atteint la valeur critique, la barre peut fléchir légèrement (fig. X.6). Pour fixer les idées, mettons que $I_x < I_y$, alors la barre fléchit dans le plan du dessin. La force extérieure F_{cr} effectue alors un travail qui passe en énergie potentielle de flexion calculée d'après la formule [VI.22]

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dz}{EI_x}$$

ou

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI_x f''^2 dz, \tag{X.33}$$

étant donné que $M = EI_x f''$.

Le travail de la force axiale :

$$W_f = F_{cr}\delta, \tag{X.34}$$

où δ est le déplacement du point d'application de la force F_{cr}.

Dans le calcul du travail W_f, le facteur 1/2 ne figure pas du fait que la perte de stabilité est précisément définie par la valeur constante des forces extérieures.

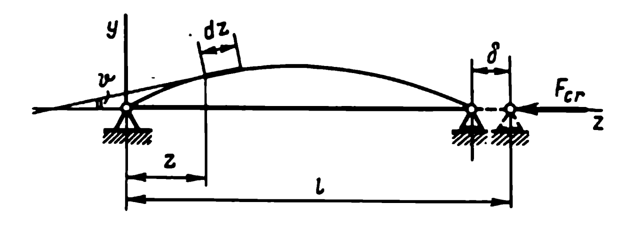


Fig. X.6

Le déplacement δ peut être déterminé comme différence entre la longueur l et la projection de l'axe fléchi de la barre sur la droite qui réunit les appuis. Il est clair que (fig. X.6)

$$d\delta = dz - dz\cos\vartheta = \frac{dz}{2}\sin^2\vartheta \approx \frac{1}{2}\vartheta^2 = \frac{1}{2}f'^2.$$

(Vu la petitesse des déformations, on adopte que $\sin\vartheta = \operatorname{tg}\vartheta = \vartheta = f'$.)
Donc

$$\delta = \frac{1}{2}\int_0^l f'^2 dz. \tag{X.35}$$

L'énergie potentielle de la force axiale

$$U_f = -W_f = -F_{cr}\delta.$$

L'énergie potentielle totale de la barre

$$V = U + U_f = 0 \tag{X.36}$$

ou

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l EI_x f''^2 dz - \frac{F}{2}\int_0^l f'^2 dz. \tag{X.37}$$

Voici l'un des théorèmes importants de la mécanique du corps déformé, qui est à la base de la méthode efficace et très générale de résolution de différents problèmes techniques et, notamment, des problèmes de stabilité des formes d'équilibre élastiques.

THÉORÈME DE LAGRANGE-DIRICHLET * : *de tous les déplacements qui satisfont aux conditions aux limites données, ceux qui correspondent aux conditions d'équilibre stable assurent la valeur minimale de l'énergie potentielle totale du système.*

Ce théorème rend disponible le nombre nécessaire d'équations de la forme $dV/dX_i = 0$, ce qui permet de résoudre des problèmes à nombreux paramètres X_i inconnus. Le théorème est vrai pour des systèmes déformables aussi bien linéaires que non linéaires.

En se donnant telle ou telle fonction f susceptible de satisfaire aux conditions aux limites données, on peut réaliser le calcul approché de la force critique.

Pour choisir la fonction f, il faut que les conditions aux limites cinématiques (flèches, angles de rotation des sections) soient satisfaites. Les conditions aux limites statiques (moments fléchissants, forces transversales) peuvent ne pas être observées, mais ceci est désirable si l'on veut avoir des résultats plus exacts.

Des résultats plus exacts s'obtiennent si l'énergie de la flexion se calcule non pas d'après (X.33), mais d'après [VI.22], puisque le choix approprié de l'équation de la courbe f, dont dépend la valeur de M, assure une meilleure approximation que celui de l'équation de f''.

Pour calculer la force critique des potences (fig. X.7), il est recommandé de retenir comme état déformé celui dû à l'action d'une charge convenable, par exemple, à la force horizontale P.

Exemple X.5. Déterminer par la méthode énergétique la force critique de la barre à section constante représentée sur la figure X.6.

Solution. Adoptons pour l'axe fléchi l'équation de la parabole

$$f = Cz(l - z).$$

Cette équation satisfait aux conditions cinématiques $f_{z=0} = 0$; $f_{z=l} = 0$, mais ne vérifie pas les conditions aux limites statiques du fait que $f'' =$ const, c'est-à-dire que le moment fléchissant est constant suivant la longueur, alors qu'en fait il croît des extrémités de la poutre vers son milieu. En calculant V à partir de la formule (X.37) et en utilisant la condition $dV/dC = 0$, on trouve $F_{cr} = 12\, EI_x/l^2$ au lieu de la valeur exacte

$$F_{cr} = \pi^2 EI_x/l^2 \approx 9{,}87\, EI_x/l^2.$$

Si l'énergie de la flexion se calcule d'après [VI.22], on obtient $F_{cr} = 10\, EI_x/l^2$, ce qui n'est que de 1,3 % supérieur à la valeur exacte. (On adopte $M = Ff$.)

Il convient de noter que les forces critiques déterminées par la méthode énergétique sont toujours plus grandes que les forces réelles.

Adoptons pour l'axe fléchi l'équation

$$f = C \sin \pi z/l.$$

* Ce théorème est le plus général de la théorie de l'élasticité, de la mécanique des constructions et de la résistance des matériaux. Sa démonstration est donnée dans les cours de la théorie de l'élasticité et de la mécanique des constructions.

Cette équation satisfait aussi bien aux conditions cinématiques que statiques du fait que, en réalité, aux extrémités de la barre les flèches et les moments fléchissants sont nuls.

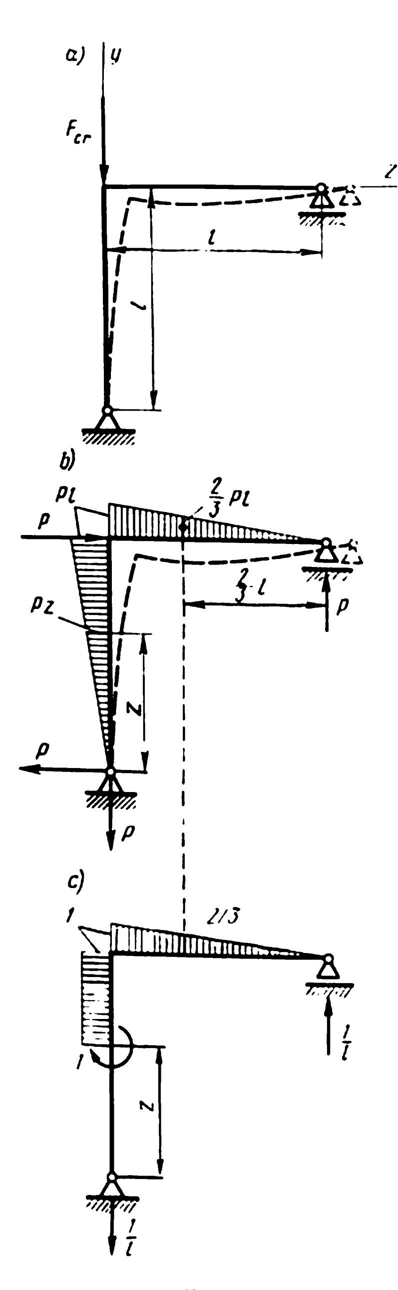


Fig. X.7

Calculons

$$f' = C\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi z}{l}; \qquad f'' = -\frac{C\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi z}{l};$$

$$\int_0^l f'^2 dz = \frac{C^2\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos^2\frac{\pi z}{l}\,dz = \frac{C^2\pi^2}{2l};$$

$$\int_0^l f''^2 dz = \frac{C^2\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\frac{\pi z}{l}\,dz = \frac{C^2\pi^4}{2l^3}.$$

Le calcul de V d'après la formule (X.37) en utilisant la condition $dV/dC = 0$ amène

$$F_{cr} = \pi^2 EI_x/l^2$$

ou la valeur exacte. Cette valeur s'obtient parce qu'on s'est donné l'expression exacte de l'axe fléchi.

Exemple X.6. Calculer F_{cr} d'une barre comprimée dont une extrémité est encastrée, et l'autre, libre (cf. fig. X.2).

Solution. Représentons la ligne élastique sous la forme d'une fonction à deux paramètres $f = Bz^2 + Cz^4$. (La coordonnée z est comptée à partir de l'extrémité encastrée.) Calculons l'énergie potentielle totale

$$V = \frac{1}{2}EI\int_0^l f''^2 dz - \frac{1}{2}F\int_0^l f'^2 dz = 2EIl\left(B^2 + 4BCl^2 + \frac{36}{5}C^2l^4\right) -$$

$$-2Fl^3\left(\frac{1}{2}B^2 + \frac{4}{5}BCl^4 + \frac{4}{7}C^2l^6\right).$$

En annulant les dérivées $\partial V/\partial B = 0$ et $\partial V/\partial C = 0$ (en vertu du théorème de Lagrange-Dirichlet), on obtient

$$(EI - Fl^2/3)B - (2EIl^2 - 2Fl^4/5)C = 0;$$

$$(EI - Fl^2/5)B - (18EIl^2/5 - 2Fl^4/7)C = 0.$$

Si $B \neq 0$ et $C \neq 0$, le déterminant composé de coefficients affectés à B et C doit être nul :

$$\left(EI - \frac{F}{3}l^2\right)\left(\frac{18}{5}EIl^2 - \frac{2}{7}Fl^4\right) - \left(2EIl^2 - \frac{2Fl^4}{5}\right)\left(EI - \frac{F}{5}l^2\right) = 0,$$

d'où l'on tire la force critique

$$F_{cr} = 2{,}5\, EI/l^2.$$

L'erreur par rapport à la valeur exacte $F_{cr} = \pi^2 EI/(4l^2)$ n'est que de 1,2%.

Si on se bornait à la fonction à un paramètre B, on obtiendrait $F_{cr} = 3EI/l^2$, qui constitue une erreur atteignant 20 % par rapport à la valeur exacte.

Exemple X.7. Calculer F_{cr} de la barre de la figure X.8.

Solution. Admettons que la perte de stabilité fléchit la barre suivant la sinusoïde $f = f_0 \sin \pi z/l$. Aux extrémités de la barre cette équation satisfait aussi bien aux conditions

cinématiques que statiques. Le moment fléchissant varie donc aussi suivant la sinusoïde :

$$f = f_0 \sin\frac{\pi z}{l}\ ; \qquad f' = \frac{\pi}{l} f \cos\frac{\pi z}{l}\ ; \qquad f'^2 = \frac{\pi^2 f^2}{l^2}\cos^2\frac{\pi z}{l}\ ;$$

$$M = F_{cr} f\ ; \qquad M^2 = F_{cr}^2 f_0^2 \sin^2 \pi z/l.$$

Calculons l'énergie de la flexion

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dz}{EI_x} = \frac{1}{2}\int_0^{l/2} \frac{M^2 dz}{2EI} + \frac{1}{2}\int_{l/2}^{l} \frac{M^2 dz}{1{,}6EI} = 0{,}14\frac{F_{cr}^2 f_0^2 l}{EI}.$$

Cherchons le travail de la force axiale

$$W_f = \frac{1}{2} F_{cr}\int_0^l f'^2 dz = \frac{1}{2} F_{cr}\int_0^l \frac{\pi^2 f_0^2}{l^2}\cos^2\frac{\pi z}{l}\, dz = \frac{F_{cr}\pi^2 f_0^2}{4l}.$$

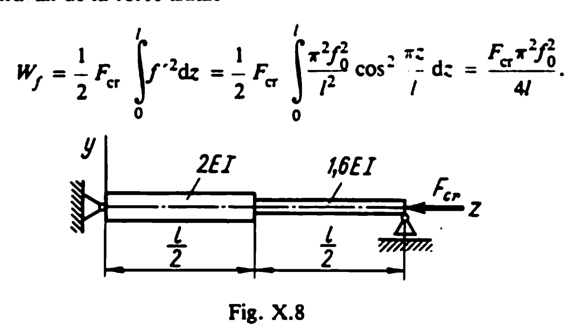


Fig. X.8

L'énergie totale

$$V = U - W_f = 0{,}14F_{cr}^2 f_0^2\, l/(EI) - F_{cr}\pi^2 f_0^2/(4l).$$

De la condition $\mathrm{d}V/\mathrm{d}f_0 = 0$ on tire $F_{cr} = \pi^2 EI/(0{,}56 l^2) = 17{,}65\, EI/l^2$. La valeur exacte de $F_{cr} = 17{,}62\, EI/l^2$.

Exemple X.8. Calculer F_{cr} pour la potence de la figure X.7, *a*.

Solution. Admettons qu'en perdant la stabilité la barre se déforme à peu près de la même façon que sous l'action de la force horizontale *P*. Construisons le diagramme de *M* engendré par l'action de la force *P* (cf. fig. X.7, *b*) et déterminons l'énergie potentielle de la flexion d'après la formule [VI.22] ou la règle de Vérechtchaguine, en multipliant le diagramme de *M* par lui-même:

$$U = \frac{1}{2}\sum\int_0^l \frac{M^2 ds}{EI_x} = \frac{1}{2}\,2\left(lPl\frac{1}{2}\frac{2}{3}Pl\right) = \frac{P^2 l^3}{3EI_x}.$$

Le travail de la force axiale F_{cr} se calcule d'après la formule (X.34) :

$$W = F_{cr}\delta = \frac{F_{cr}}{2}\int_0^l f'^2 dz.$$

L'angle de rotation $f' = \vartheta$ de la section courante *z* se trouve à l'aide de la méthode de Mohr en appliquant à la section *z* le moment unitaire, en construisant le diagramme de *M* (cf.

fig. X.7, *c*) et en multipliant le diagramme de M dû à l'action de la force P par le diagramme de M dû à l'action du moment unitaire :

$$\vartheta = \frac{l}{EI}\,\frac{1}{2}\,lPl\,\frac{2}{3} + \frac{l}{2EI}\,(Pl + Pz)(l - z)\cdot 1 = \frac{5Pl^2}{6EI} - \frac{Pz^2}{2EI};$$

$$W = \frac{F_{cr}}{2}\int_0^l \frac{P^2}{E^2I^2}\left(\frac{5l^2}{6} - \frac{z^2}{2}\right)^2 dz = \frac{F_{cr}\cdot 16{,}8P^2l^5}{72}.$$

Calculons $V = U - W$. De la condition $\mathrm{d}V/\mathrm{d}P = 0$ on tire $F_{cr} = 1{,}43\,EI/l^2$.

La valeur exacte de $F_{cr} = 1{,}422\,EI/l^2$.

La méthode de calcul examinée dans ces exemples, fondée sur le théorème de Lagrange-Dirichlet, porte le nom *de Ritz*.

CHAPITRE XI

ACTION DYNAMIQUE DES CHARGES

§ 92. Charges dynamiques

Jusque-là nous avons étudié l'action exercée sur les pièces des constructions par des charges statiques. Nous savons de ce qui précède que ces charges changent de zéro à l'infini si lentement, que les accélérations que reçoivent les éléments des constructions sont négligeables. Or, les charges ont souvent une allure dynamique, variant dans le temps à une grande vitesse. Leur action s'accompagne alors de vibrations des ouvrages ou de leurs éléments isolés.

Les contraintes engendrées par les vibrations des pièces peuvent être de plusieurs fois supérieures en valeur à celles dues à l'action des charges statiques.

Le calcul des pièces des ouvrages à la charge dynamique est plus compliqué que celui à la charge statique. Les difficultés sont constituées, d'une part, par les méthodes plus compliquées de la détermination des efforts intérieurs et des contraintes provoquées par les charges dynamiques et, d'autre part, par les méthodes plus compliquées de la détermination des propriétés mécaniques des matériaux sollicités par ce type de charges. Par exemple, sous l'action d'une charge de choc (c'est-à-dire d'une charge de très courte durée) de nombreux matériaux qui dans le cas de l'action statique étaient plastiques, travaillent comme des matériaux fragiles ; sous l'action de nombreux cycles des charges alternatives la résistance du matériau diminue brusquement.

La méthode générale de calcul à la charge dynamique est fondée sur le principe de D'Alembert connu de la mécanique rationnelle. D'après ce principe, si l'on ajoute aux forces extérieures subies par le corps la force de l'inertie égale au produit de sa masse par son accélération et dirigée dans le sens opposé à cette accélération, tout corps animé d'un mouvement peut être considéré comme se trouvant à l'état d'équilibre instantané. Aussi, lorsqu'on connaît les forces d'inertie, peut-on appliquer sans aucune restriction la méthode des sections et calculer les efforts intérieurs en utilisant les équations d'équilibre.

Mais dans les cas où la détermination des forces d'inertie est difficile, comme il en est, par exemple, dans les conditions du choc, les contraintes

dynamiques et les déformations se calculent d'après la loi de la conservation de l'énergie.

§ 93. Calcul des contraintes pour le mouvement uniformément accéléré

Il arrive souvent que les accélérations avec lesquelles se déplacent les pièces des machines sont connues. Alors, le calcul des contraintes dynamiques ne présente pas de difficultés. Considérons quelques exemples.

Exemple XI.1. Une charge de poids G est soulevée avec une accélération a (fig. XI.1). Calculer la tension du câble en négligeant son poids.

Solution. Appliquons à la charge la force de l'inertie égale à $ma = Ga/g$ et dirigée en bas. Utilisons la méthode des sections. Pratiquons la coupe $m—n$ et rejetons la partie supérieure du

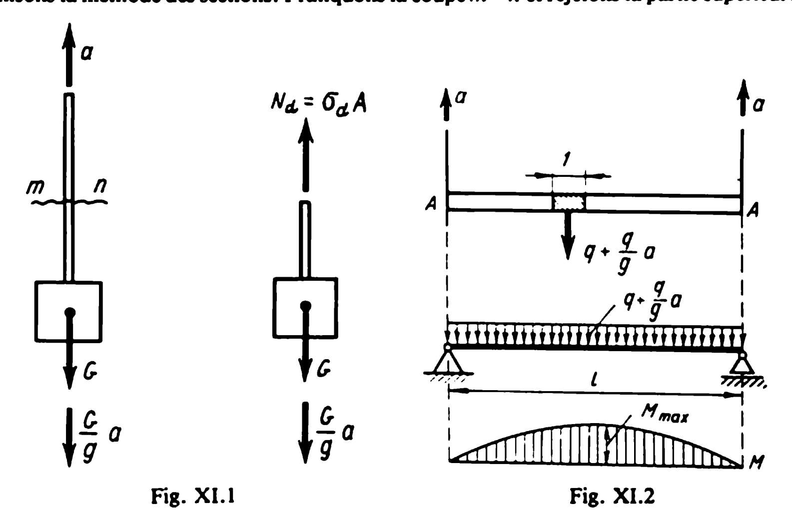


Fig. XI.1 Fig. XI.2

câble. Notons N_d l'effort dans le câble. Les contraintes supportées par le câble étant, en traction centrale, uniformément réparties suivant la section, on peut adopter que $N_d = \sigma_d A$, où σ_d est la contrainte dynamique subie par le câble.

En projetant les forces, y compris les forces d'inertie, sur l'axe vertical, on obtient

$$\sigma_d A - G(1 + a/g) = 0,$$

d'où

$$\sigma_d = \frac{G}{A}\left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_{st} K_d,$$

où $\sigma_{st} = G/A$ est la contrainte sous l'action statique de la charge ; $K_d = 1 + a/g$, le coefficient dynamique.

Ainsi, dans de nombreux cas les contraintes dynamiques peuvent être exprimées à l'aide des contraintes statiques et le coefficient dynamique. Ceci est très commode du fait que ce dernier est souvent déterminé expérimentalement.

Exemple XI.2. Une barre de poids q par mètre est soulevée à l'aide de deux fils fixés à ses extrémités (fig. XI.2). Le mouvement a lieu avec une accélération a. Déterminer les contraintes supportées par la barre.

Solution. Appliquons à chaque élément de la barre de longueur égale à l'unité la force d'inertie qa/g. Il est clair que ce problème est équivalent à celui d'une poutre simple chargée uniformément par une charge d'intensité $q + qa/g$.

Le moment fléchissant maximal est appliqué à la section du milieu de la barre

$$M_d = \frac{(q + qa/g)l^2}{8} = \frac{ql^2}{8}\left(1 + \frac{a}{g}\right) = M_{st}K_d,$$

où $M_{st} = ql^2/8$ est le moment fléchissant dû à la charge statique uniformément répartie d'intensité q ; $K_d = 1 + a/g$, le coefficient dynamique.

La contrainte dynamique maximale est déterminée d'après la formule usuelle de la flexion

$$\sigma_d = M_d/W_x = \sigma_{st}K_d.$$

§ 94. Déplacements et contraintes dans le cas de choc

Considérons le cas du choc *longitudinal* porté par une charge à un corps fixe. Soit une masse G qui tombe d'une hauteur h sur la barre fixe (fig. XI.3, a). La vitesse du corps à l'instant de la percussion est déterminée d'après la formule connue de la chute libre $v = \sqrt{2qh}$. En un intervalle de temps très court de la durée du choc, mesuré par des centièmes ou

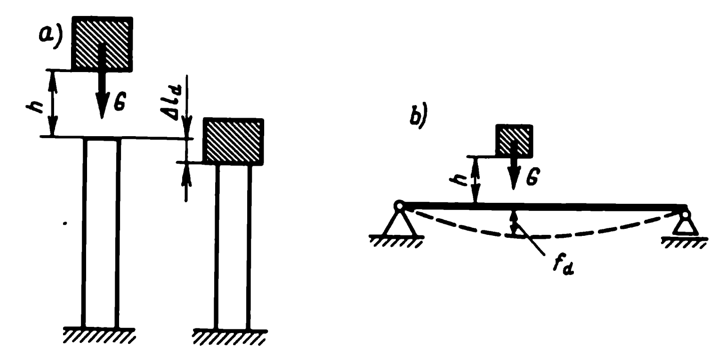


Fig. XI.3

des millièmes de seconde, cette vitesse s'annule. La grande accélération (décélération) engendre une force d'inertie importante qui détermine justement l'action du choc.

Pourtant, il est difficile d'établir théoriquement la loi de la variation de la vitesse et, par suite, la force d'inertie. Dans ce cas, on choisit une autre voie, en appliquant la loi de la conservation d'énergie et les hypothèses suivantes:

1) à l'instant de la percussion la contrainte ne dépasse pas la limite de proportionnalité, de sorte que la loi de Hooke reste en vigueur ;

2) après le choc les corps ne se séparent pas l'un de l'autre ;

3) on admet que la masse de la barre percutée est petite devant le corps percutant ; on ne la prend donc pas en compte ;

4) on néglige la perte de la partie de l'énergie qui se transforme en chaleur et en énergie du mouvement vibratoire des corps en collision.

Egalons le travail de la charge tombante à l'énergie potentielle de déformation de la barre.

Le travail effectué par la charge tombante

$$W = G(h + \Delta l_d),$$

où Δl_d est le déplacement du point de l'impact égal au raccourcissement de la barre.

En compression, l'énergie potentielle de déformation (cf. § 18)

$$U = \Delta l_d^2 EA/(2l).$$

De ces deux équations, on tire

$$G(h + \Delta l_d) = \Delta l_d^2 EA/(2l)$$

ou

$$\Delta l_d^2 EA - G2l\Delta l_d - Gh2l = 0.$$

En divisant tous les termes de cette équation par EA, on obtient

$$\Delta l_d^2 - \frac{Gl}{EA} 2\Delta l_d - \frac{Gl}{EA} 2h = 0.$$

Mais $Gl/EA = \Delta l_{st}$ est le raccourcissement de la barre sous l'action de la charge statique G. Donc,

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{st}\Delta l_d - 2\Delta l_{st} = 0.$$

En résolvant cette équation du deuxième degré par rapport à Δl_d, il vient

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \pm \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2h\Delta l_{st}}.$$

En retenant le signe plus (la solution avec le signe moins devant la racine carrée contredit le sens physique du problème), on a finalement

$$\Delta l_d = \Delta l_{st}(1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \Delta l_{st} K_d, \qquad \textbf{[XI.1]}$$

où K_d est le coefficient dynamique.

En divisant les deux membres de la dernière équation par la longueur de la barre et en les multipliant par le module d'élasticité E, passons, en vertu de la loi de Hooke, des déformations aux contraintes :

$$\sigma_d = \sigma_{st}(1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \sigma_{st} K_d. \qquad \text{(XI.2)}$$

Ces formules montrent que les contraintes dynamiques et les déplacements dépendent de la déformation statique du corps percuté. Plus la

déformation statique est grande, les autres conditions étant égales, plus les contraintes dynamiques sont faibles.

Aussi, pour adoucir le choc, emploie-t-on des joints (en caoutchouc, à ressort) susceptibles de supporter de fortes déformations.

Dans le cas du choc comprimant, pour éliminer le flambement éventuel, les contraintes dynamiques ne doivent pas dépasser leurs valeurs critiques (cf. chapitre X).

Pour le cas du choc transversal (fléchissant), les formules ont une forme analogue, mais au lieu de Δl_{st} il convient d'adopter la flèche statique f_{st} de la barre au droit de l'impact, et au lieu de Δl_d, la flèche dynamique f_d (fig. XI.3, *b*).

Cas particuliers. 1. Si $h = 0$, c'est-à-dire si l'*application de la charge est subite,* on obtient à partir des formules [XI.1] et (XI.2) $\Delta l_d = 2\Delta l_{st}$; $\sigma_d = 2\sigma_{st}$. Lorsque l'application de la charge est subite, les déformations et les contraintes sont deux fois plus grandes que sous l'action statique de cette même charge.

2. Si la hauteur de la chute h est sensiblement plus grande que la déformation statique Δl_{st}, pour déterminer le coefficient dynamique, on obtient la formule approchée suivante:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}} \approx \sqrt{2h/\Delta l_{st}}. \qquad \text{(XI.2a)}$$

Exemple XI.3. Sur une poutre en H n° 27a en acier à travée de 3 m tombe au milieu de la travée une charge $G = 1$ kN d'une hauteur $h = 10$ cm $= 0,1$ m. Le moment d'inertie de la section $I_x = 5500 \cdot 10^{-8}$ m^4 ; le couple de réaction $W_x = 407 \cdot 10^{-6}$ m^3 (données des tableaux des normes) ; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

Calculer la flèche maximale de la poutre et les contraintes maximales subies par sa section droite.

Solution. Calculons la flèche statique sous la charge d'après la formule (VII.23) :

$$f_{st} = \frac{Gl^3}{48EI} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0048 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}0048\ \text{cm}.$$

Le coefficient dynamique

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 10/0{,}0048} = 64.$$

Dans ce cas l'effet dynamique de la charge tombante est de 64 fois supérieur à son effet statique.

Calculons la contrainte statique sous la charge G.

Le moment fléchissant maximal est appliqué à la section du milieu de la poutre

$$M = Gl/4 = 1 \cdot 3/4 = 0{,}75\ \text{kN} \cdot \text{m}.$$

La contrainte statique maximale

$$\sigma_{st} = M/W_x = 0{,}75/(407 \cdot 10^{-6}) = 1860\ \text{kPa} = 1{,}86\ \text{MPa}.$$

La contrainte dynamique maximale

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d = 1{,}86 \cdot 64 = 119\ \text{MPa}.$$

Cet exemple montre comment l'action des charges dynamiques est dangereuse. Il y a encore cette circonstance que pour le choc les contraintes admissibles sont plus faibles que pour les charges statiques.

§ 95. Choc excentré

Le *choc excentré* présente un intérêt bien plus grand étant très fréquent dans la pratique.

Par exemple, lors de l'enfoncement des pieux dans le sol même un faible gauchissement du pieu et du corps percutant rend le choc excentré (fig. XI.4, *a*).

Conservons les mêmes hypothèses sur l'allure du choc que dans le cas du choc central.

Etant donné qu'en plus des déformations et des contraintes de traction (de compression), le choc excentré engendre des déformations et des contraintes de flexion, adoptons l'hypothèse que l'axe de la barre fléchi sous le choc coïncide suivant la forme avec l'axe fléchi par l'action statique de la charge.

Les hypothèses adoptées sont admissibles pour des vitesses de choc peu grandes.

Calculons le travail du poids G de la charge qui tombe d'une hauteur h :

$$W = G(h + \delta_d), \tag{XI.3}$$

où δ_d est le déplacement au droit de la percussion C (fig. XI.5). Ce déplacement peut être mis sous la forme de la somme :

$$\delta_d = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \tag{XI.4}$$

où $\delta_1 = F_d l/(EA)$ est le raccourcissement de l'axe de la barre sous l'action de la force longitudinale F_d ; δ_2, le raccourcissement de l'axe sous l'effet de son fléchissement. Lorsque l'encastrement est réalisé à l'extrémité inférieure de la barre, ce raccourcissement peut se calculer d'après la formule (X.35) :

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\int_0^l f'^2 dz. \tag{XI.5}$$

Dans le cas particulier du point d'impact reposant sur l'un des axes principaux de la section, on a (cf. l'exemple VII.8)

$$f' = M_d z/(EI_x) = F_d ez/(EI_x). \tag{XI.6}$$

Donc,

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\int_0^l f'^2 dz = \frac{F_d^2 e^2 l^3}{6E^2 I_x^2}. \tag{XI.7}$$

Ici e est l'excentricité de la force du choc par rapport à l'axe central principal x.

δ_3 est le déplacement du point d'impact par suite de la rotation de la section

$$\delta_3 = e \operatorname{tg} \vartheta \approx e\vartheta, \tag{XI.8}$$

où ϑ est l'angle de rotation de la section supérieure de la barre (la petitesse de la déformation permet d'admettre que $\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta$) :

$$\vartheta = M_\text{d} l/(EI_x) = F_\text{d} el/(EI_x). \tag{XI.9}$$

Ainsi,

$$\delta_3 = F_\text{d} e^2 l/(EI). \tag{XI.10}$$

Dans le calcul des déplacements δ_2 et δ_3 l'effet de flambement avec flexion simple est négligé, c'est-à-dire qu'on admet que la rigidité de la barre est assez grande.

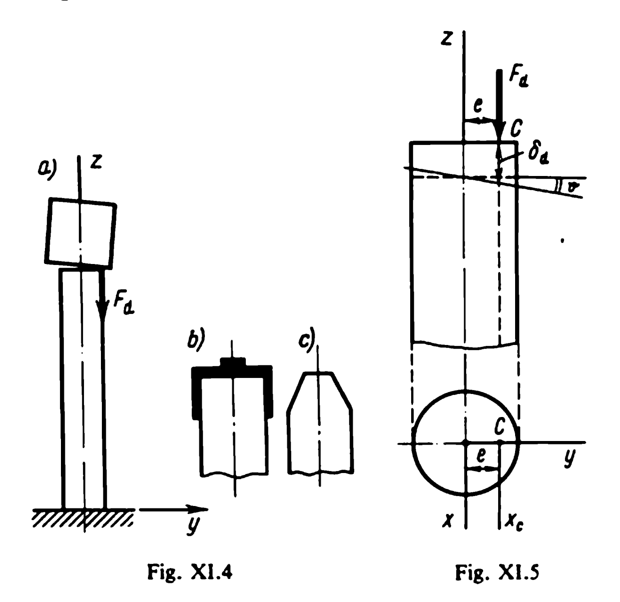


Fig. XI.4 Fig. XI.5

Finalement, la formule (XI.3) devient

$$W = G\left(h + \frac{F_\text{d} l}{EA} + \frac{F_\text{d}^2 e^2 l^3}{6E^2 I_x^2} + \frac{F_\text{d} e^2 l}{EI_x}\right). \tag{XI.11}$$

Calculons l'énergie potentielle de la déformation de la barre :

$$U = \frac{1}{2}\frac{F_\text{d}^2 l}{EA} + \frac{1}{2}\frac{M_\text{d}^2 l}{EI_x}. \tag{XI.12}$$

En retenant que $M_d = F_d e$, on obtient

$$U = \frac{F_d^2 l(I_x + Fe^2)}{2EIA} = \frac{F_d^2 l I_{x_C}}{2EI_x A}, \qquad \text{(XI.13)}$$

où $I_{x_C} = I_x + Ae^2$ est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe x_C parallèle à l'axe x et passant par le point d'impact C.

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie

$$W = U.$$

Les transformations amènent pour la force de choc F_d l'équation du deuxième degré :

$$6Gi_x^2 hEA^2 + 6GlI_{x_C} F_d + F_d^2(\Delta l_{st} e^2 \lambda^2 A - 3I_{x_C} l) = 0, \qquad \text{(XI.14)}$$

où $i_x = \sqrt{I_x/A}$ est le rayon de giration de la section par rapport à l'axe x ; $\Delta l_{st} = Gl/(EA)$, le raccourcissement statique de la barre ; $\lambda = l/i_x$, l'élancement de la barre par rapport à l'axe x.

En calculant d'après cette équation F_d, on peut tirer de la formule (XI.4) le déplacement au droit de l'impact. Dans le cas du choc comprimant, les contraintes sont données par la formule

$$\sigma_d = -F_d/A \pm M_d/W_x = F_d(-1/A \pm e/W_x). \qquad \text{(XI.15)}$$

Si les déformations de la barre sont petites par rapport à la hauteur de la chute h, en égalant le travail de la force de G égal à $W = Gh$ à l'énergie potentielle de la déformation (XI.13), on obtient

$$Gh = F_d^2 l I_{x_C}/(2EI_x A), \qquad \text{(XI.16)}$$

d'où

$$F_d = G\sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}} \frac{I_x}{I_{x_C}}} = F_{st} K_d, \qquad \text{(XI.17)}$$

où

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}} \frac{I_x}{I_{x_C}}} \qquad \text{(XI.17a)}$$

est le coefficient dynamique. Les contraintes sont

$$\sigma_d = F_d(-1/A \pm e/W_x) = F_{st} K_d(-1/A \pm e/W_x) = \sigma_{st} K_d. \qquad \text{(XI.18)}$$

D'une façon analogue, on peut résoudre le problème dans le cas général du choc lorsque le point d'impact ne repose pas sur l'un des axes principaux de la section droite.

Exemple XI.4. Déterminer la force de choc et les contraintes engendrées par la charge tombante de poids G dans la barre de section circulaire pour deux cas : 1) choc central ; 2) choc excentré avec $e = r$.

Solution. Les coefficients dynamiques se calculent à l'aide des formules approchées, en admettant que h est grand par rapport à Δl_{st}.

1. *Choc central.* Le coefficient dynamique est donné par la formule (XI.2a) :

$$K_d = \sqrt{2h/\Delta l_{st}}\ ;$$

$$F_d = F_{st}K_d = -G\sqrt{2h/\Delta l_{st}}\ ;\ \sigma_d = \sigma_{st}K_d = -\frac{G}{A}\sqrt{2h/\Delta l_{st}}.$$

2. *Choc excentré* ($e = d/2$). K_d est déterminé d'après la formule (XI.17a) :

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}\frac{I_x}{(I_x + Ae^2)}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}\frac{0{,}05d^4}{(0{,}05d^4 + 0{,}785d^2\cdot 0{,}25d^2)}} = 0{,}446\sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}}\ ;$$

$$F_d = -F_{st}K_d = -0{,}446G\sqrt{2h/\Delta l_{st}}\ ;$$

$$\sigma_d = -K_d(F_{st}/A + M_{st}/W_x) = -0{,}446\sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}}\left(\frac{G\cdot 4}{\pi d^2} + \frac{G\cdot 0{,}5d\cdot 32}{\pi d^3}\right) =$$

$$= -2{,}33\frac{G}{A}\sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}}.$$

En comparant les résultats on voit que dans le cas du choc central la force d'impact F_d est de 2,24 fois supérieure à celle de la percussion excentrée, et les contraintes, de 0,43 fois plus faibles. Il s'ensuit que lors du battage des pieux par exemple, il est avantageux de centrer le choc de façon à augmenter la force d'impact qui enfonce le pieu dans le sol et à diminuer les contraintes dynamiques en éliminant le moment fléchissant qui n'influe pas sur la valeur de l'enfoncement.

Pour centrer le choc, le casque de battage doit être exécuté avec une saillie de centrage (cf. fig. XI.4, *b*) ou l'extrémité du pieu doit être effilée (cf. fig. XI.4, *c*).

§ 96. Essai des matériaux par choc

D'après les recherches la vitesse de la déformation influe sensiblement sur les propriétés mécaniques des matériaux.

La figure XI.6 représente deux diagrammes de traction, statique *1* et dynamique *2*. Ces diagrammes montrent que la limite d'écoulement et la charge de rupture sont plus élevées dans le cas de la traction par choc. Les recherches de Davidenkov et d'autres auteurs montrent que la limite d'écoulement augmente de 20 à 70 %, et la charge de rupture, de 10 à 30 % par rapport à la traction statique. La plasticité diminue avec l'augmentation de la vitesse de déformation. Les vitesses de sollicitation relativement faibles font déjà apparaître l'aptitude à la rupture fragile.

Les diagrammes de traction par choc du type *2* de la figure XI.6 sont établis à l'aide des machines spéciales très compliquées. Aussi, pour évaluer les propriétés des matériaux sous l'action d'une charge dynamique recourt-on dans les cas courants à une autre méthode plus simple, à celle de

l'*essai par choc.* A cet effet, on emploie des éprouvettes de forme normalisée. L'une d'entre elles est représentée sur la figure XI.7.

Au milieu de l'éprouvette on pratique une entaille de 2 mm de profondeur pour rendre les conditions de service du matériau plus pénibles, l'entaille étant un concentrateur des contraintes.

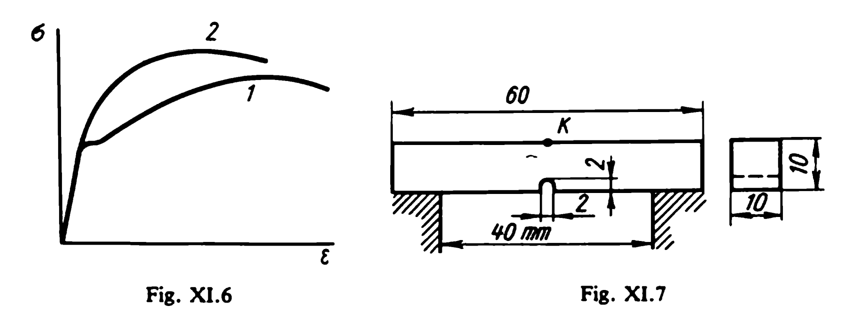


Fig. XI.6 Fig. XI.7

L'éprouvette est soumise à la rupture par choc sur un mouton-pendule spécial (fig. XI.8). La chute du couteau *C* du mouton, monté à la hauteur h_1, rompt l'éprouvette en la percutant au point *K* (cf. fig. XI.7) et remonte sous l'effet de l'énergie cinétique restante jusqu'à la hauteur $h_2 < h_1$.

Le travail réalisé par le pendule est $W = G(h_1 - h_2)$. Il est absorbé par la rupture de l'éprouvette, à l'exception d'une petite partie ΔW absorbée par les résistances nocives (frottement dans la machine, résistance de l'air). Ces pertes sont connues pour chaque exemplaire du mouton.

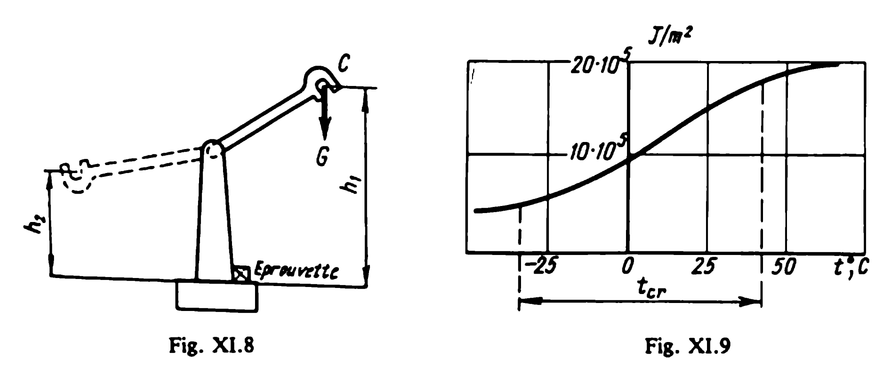


Fig. XI.8 Fig. XI.9

Comme caractéristique du pouvoir du matériau de résister à l'action de la charge par choc, on prend la quantité

$$a = W_1/A, \tag{XI.19}$$

où $W_1 = W - \Delta W$ est le travail absorbé par la rupture de l'éprouvette ; A, l'aire de la section droite de l'eprouvette au droit de l'entaille.

La grandeur a s'appelle *résilience* du matériau. Plus a est grand, mieux le matériau résiste au choc, plus il est résilient.

La résilience a dépend de la température t à laquelle est réalisé l'essai. Pour l'acier Ст 3 le graphique de la relation entre a et t est représenté sur la figure XI.9. Avec la baisse de la température, a diminue. Il existe un intervalle de température t_{cr} lorsque la diminution de a est particulièrement rapide. Il s'appelle *intervalle critique de température* (zone de transition).

A gauche de cette zone, se trouve le *domaine de la fragilité thermique*. On voit que pour l'acier Ст 3 ce domaine correspond à la température inférieure à —25 °C. A la température de —20 à +30 °C pour cet acier a vaut de $6 \cdot 10^5$ à $12 \cdot 10^5$ J/m^2. Notons à titre de comparaison que pour les stratifiés verre-résine a varie de $1 \cdot 10^5$ à $6 \cdot 10^5$ J/m^2. Par conséquent, la résistance des stratifiés verre-résine à l'action des chocs est sensiblement pire que celle de l'acier à bas carbone.

§ 97. Oscillations libres d'un système à un degré de liberté *

Comme nous l'avons déjà dit, la particularité caractéristique des charges dynamiques est l'apparition des oscillations des structures et de leurs éléments isolés.

Dans le cas des oscillations résultant de l'action des accélérations, on observe l'apparition des forces d'inertie qui dans les éléments des constructions peuvent être de nombreuses fois supérieures aux efforts engendrés par des charges statiques. C'est pourquoi les charges dynamiques présentent un danger bien plus grand que les charges statiques.

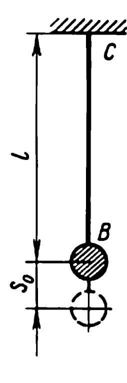


Fig. XI.10

Considérons le problème le plus simple de la théorie des oscillations, celui des oscillations *libres* (ou propres) d'un corps dont la masse est concentrée en un point (fig. XI.10). Admettons que la masse de la barre ou du

---

* Les §§ 97 et 98 tiennent compte des prescriptions des normes soviétiques GOST 24346-80 et 24347-80, « Vibrations ».

ressort supportant le corps est négligeable par rapport à la masse du corps oscillant.

La position du corps qui oscille est alors complètement déterminée par un seul paramètre, le déplacement s du corps par rapport à la position d'équilibre statique. Dans ce cas et dans des cas analogues, on dit que le *système possède un degré de liberté.*

Le nombre de degrés de liberté ou de paramètres indépendants qui interviennent dans la position du système, dépend du schéma de calcul retenu. Ainsi, si dans le cas envisagé on ne peut pas négliger la masse de la tige *BC*, il faut introduire un ensemble infini des coordonnées déterminant la position de tous les points de cette tige, ce qui veut dire que le système possède un nombre infini de degrés de liberté.

Pour faire osciller un corps autour de la position d'équilibre, allongeons la tige *BC* d'une quantité quelconque s_0 et laissons le corps à lui-même. Il effectue alors des mouvements oscillatoires dans la direction verticale (dans la direction *CB*). Les oscillations de cette sorte qu'effectue un système libéré de l'action des forces extérieures et laissé à lui-même s'appellent *libres* ou propres. Les oscillations propres se poursuivent tant que l'énergie communiquée au début des oscillations n'est complètement absorbée par le travail pour surmonter les forces de frottement contre l'air et les forces de frottement intérieur dans le matériau.

Les oscillations sont dites *forcées* si elles ont lieu sous l'action des forces extérieures variables dites *perturbatrices*.

En composant les équations du mouvement, on part du principe de D'Alembert d'après lequel à un système qui se déplace avec accélération on peut appliquer les équations de statique si dans le nombre de forces extérieures on introduit la force d'inertie fictive égale au produit de la masse par l'accélération et dirigée dans le sens opposé à l'accélération.

Désignons par s l'écart du corps par rapport à la position d'équilibre.

Un corps oscillant subit l'action des forces suivantes :

1) réaction de la part de la tige *CB* égale, en vertu de la loi de Hooke, à

$$N = EAs/l = s/s_{11}, \tag{XI.20}$$

où s_{11} est le déplacement produit par la force égale à l'unité appliquée au point de la fixation de la masse ;

2) la force d'inertie égale au produit de la masse par l'accélération :

$$i = m\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2. \tag{XI.21}$$

La somme de ces forces doit être nulle :

$$m\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 + s/s_{11} = 0 \tag{XI.22}$$

ou

$$d^2s/\mathrm{d}t^2 + \omega^2 s = 0, \tag{XI.23}$$

où

$$\omega = \sqrt{1/(ms_{11})} \tag{XI.24}$$

est la fréquence angulaire ou la pulsation des oscillations (leur nombre en 2π secondes).

(XI.23) est une équation différentielle d'ordre deux, homogène linéaire à coefficients constants. L'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$s = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \tag{XI.25}$$

ou

$$s = A \sin(\omega t + \varphi), \tag{XI.26}$$

où B_1, B_2 et A, φ sont des constantes arbitraires.

(XI.26) est l'équation des *oscillations harmoniques*. Dans cette équation la quantité A est l'écart maximal (amplitude) de la masse oscillante par rapport à la position d'équilibre, du fait que la valeur maximale de $\sin(\omega t + \varphi)$ vaut l'unité. L'argument $\omega t + \varphi$ est la *phase des oscillations*, et la quantité φ, la *phase initiale de l'oscillation*, c'est-à-dire la valeur de la phase à $t = 0$.

La vitesse de la masse en mouvement

$$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = A\omega \cos(\omega t + \varphi). \tag{XI.27}$$

L'amplitude A et la phase initiale φ sont déterminées d'après les conditions initiales du mouvement. Si à l'instant initial $t = 0$ le déplacement de la masse $s = s_0$ et la vitesse $v = v_0$, on tire des équations précédentes

$$s_0 = A \sin \varphi \; ; \; v_0 = B\omega \cos \varphi,$$

d'où

$$A = \sqrt{s_0^2 + v_0^2/\omega^2} \; ; \quad \mathrm{tg}\, \varphi = \omega s_0/v_0, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\varphi = \mathrm{Arctg}\, \omega s_0/v_0. \tag{XI.28}$$

La courbe (XI.26) des oscillations est représentée sur la figure XI.11. Cherchons la période totale T de l'oscillation qui est l'intervalle de temps après lequel la masse oscillante reprend sa position initiale. La période de sinus et de cosinus étant 2π, après le temps T la phase des oscillations augmente de 2π ; en vertu de la formule (XI.26), on a

$$\omega(t + T) + \varphi - (\omega t + \varphi) = 2\pi,$$

d'où

$$T = 2\pi/\omega \tag{XI.29}$$

ou en portant la valeur de ω de (XI.24), il vient

$$T = 2\pi \sqrt{ms_{11}}. \tag{XI.30}$$

Puisque dans cette formule ne figurent ni s_0, ni v_0, la période d'oscillation ne dépend pas des conditions initiales du mouvement.

La formule précédente implique également

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{1/(ms_{11})}\ ; \tag{XI.31}$$

ceci signifie que la pulsation des oscillations détermine le nombre d'oscillations complètes de la masse en 2π secondes. En retenant que $s_{11} = l/(EA)$, on obtient

$$\omega = \sqrt{EA/(ml)},$$

c'est-à-dire que la pulsation des oscillations est d'autant plus grande que l'est la rigidité de la tige (ressort) et diminue avec l'augmentation de la longueur de la tige et de la masse oscillante.

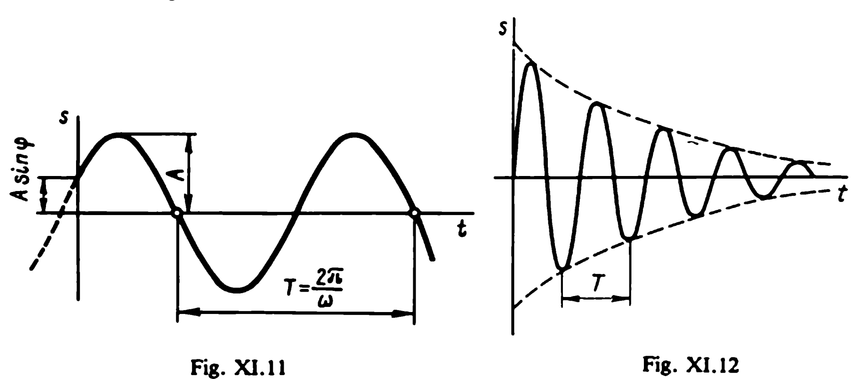


Fig. XI.11

Fig. XI.12

Les formules mentionnées sont également vraies pour le cas des oscillations transversales (fléchissantes) de la tige sous la condition que s_{11} est déterminé comme la flèche de la barre produite par la force unitaire appliquée au point de fixation de la masse oscillante.

Nous avons déjà dit que de différentes forces de la résistance font qu'avec le temps les oscillations libres commencent à s'amortir.

Si l'on admet que la force de résistance est proportionnelle à la vitesse du mouvement (ce qui à de faibles vitesses est admissible), en composant l'équation des oscillations, il faut inclure au nombre de forces extérieures la force de la résistance $b\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, où b est le coefficient de proportionnalité * entre la force et la vitesse. Alors, au lieu de (XI.22), on obtient

$$m\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 + b\mathrm{d}s/\mathrm{d}t + s/s_{11} = 0 \tag{XI.32}$$

ou

$$\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 + 2n\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t + \omega^2s = 0, \tag{XI.33}$$

* Coefficient de résistance.

où

$$2n = b/m \;;\quad \omega^2 = 1/(m\ ). \tag{XI.34}$$

La solution de cette équation est de la forme

$$s = Ae^{-nt}\sin(\omega_d t + \varphi), \tag{XI.35}$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \tag{XI.36}$$

La courbe de ces oscillations est représentée sur la figure XI.12. Elle montre que les oscillations propres s'amortissent avec le temps. La fréquence des oscillations ω_d se distingue peu de la fréquence des oscillations propres sans amortissement, du fait que la quantité n^2 est généralement petite devant ω^2.

Le rapport de deux amplitudes mesurées dans l'intervalle d'une période

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = e^{-nt}/e^{-n(t+T)} = e^{nT},$$

d'où

$$nT = \ln\frac{s_n}{s_{n+1}} = \Lambda, \tag{XI.37}$$

où Λ est le *décrément logarithmique de l'oscillation* ; il détermine la vitesse d'amortissement des oscillations propres.

§ 98. Oscillations forcées d'un système à un degré de liberté. Résonance

Considérons un système à un degré de liberté soumis à l'action d'une force perturbatrice variant suivant une loi périodique

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t, \tag{XI.38}$$

où F_0 est la valeur maximale de la force ; Ω, la fréquence angulaire ou la pulsation de la variation de la force.

L'équation différentielle du mouvement, sans tenir compte des forces de résistance, s'écrit

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = \frac{F_0}{m}\sin \Omega t. \tag{XI.39}$$

L'intégrale de l'équation homogène (sans deuxième membre) nous est déjà connue du paragraphe précédent. Cherchons l'intégrale particulière (pour $\omega \neq \Omega$) sous la forme

$$s^* = C \sin \Omega t. \tag{XI.40}$$

En portant cette expression dans l'équation (XI.39), on trouve

$$C = F_0/[m(\omega^2 - \Omega^2)] = F_0 s_{11}/(1 - \Omega^2/\omega^2), \qquad \text{(XI.41)}$$

étant donné que $\omega^2 = 1/(ms_{11})$.

Donc, la solution de l'équation (XI.39) est de la forme

$$s = A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0 s_{11}}{(1 - \Omega^2/\omega^2)} \sin \Omega t. \qquad \text{(XI.42)}$$

Le premier terme traduit les oscillations propres, le deuxième, les oscillations forcées.

Les oscillations propres s'amortissant avec le temps, considérons seulement les oscillations forcées. Ces oscillations ont lieu avec la fréquence de la force perturbatrice Ω et l'amplitude

$$C = F_0 s_{11}/(1 - \Omega^2/\omega^2). \qquad \text{(XI.43)}$$

En tenant compte que le produit $F_0 s_{11}$ est le déplacement que réalise la masse si on y applique statiquement la force F_0, on obtient

$$C = \varepsilon_{st}/(1 - \Omega^2/\omega^2) = \varepsilon_{st} K_d,$$

où $K_d = 1/(1 - \Omega^2/\omega^2)$ est le coefficient dynamique montrant combien de fois l'amplitude des oscillations forcées est plus grande que le déplacement statique provoqué par la valeur maximale de la force perturbatrice.

La figure XI.13 représente le graphique des valeurs du coefficient dynamique (en valeur absolue). Cette courbe montre que pour les fréquences

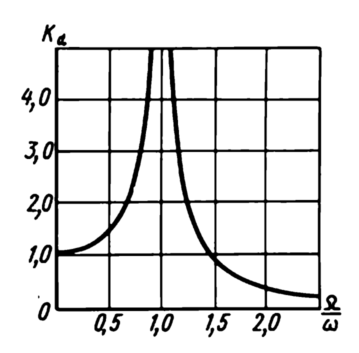


Fig. XI.13

des oscillations forcées Ω, qui s'approchent de la fréquence des oscillations propres ω, le coefficient dynamique croît indéfiniment. Par exemple, pour le cas de Ω différent de ω de 30 %, $K_d \approx 2$.

L'examen des oscillations forcées compte tenu des forces de résistance montre que K_d reste limité même avec $\Omega = \omega$, mais a pour autant la valeur maximale.

La croissance de l'amplitude observée lorsque les fréquences des oscillations propres coïncident avec la force perturbatrice porte le nom de *résonance,* et la coïncidence elle-même des fréquences s'appelle *condition de résonance.*

L'augmentation des amplitudes s'accompagnant de la croissance correspondante des contraintes engendrées dans les éléments oscillants, il est clair que dans le calcul des constructions les questions de résonance sont d'un intérêt capital. En effet, l'analyse des accidents de construction montre qu'ils sont dus très souvent à l'amplitude fortement croissante des oscillations.

Lorsque la comparaison des fréquences Ω et ω montre que la résonance est possible, il faut parer à ce danger par des mesures conceptuelles en rendant plus grand l'écart entre ces grandeurs et changeant Ω ou ω. Le plus rationnel dans ces conditions est de changer les fréquences dans le sens de l'augmentation du rapport Ω/ω (fig. XI.13), pour réduire au possible K_d. On peut l'obtenir en agissant sur la rigidité du système oscillant. Mais lorsque ceci est impossible, le concepteur doit prévoir l'*amortissement* de la construction, c'est-à-dire prévoir des dispositifs spéciaux (amortisseurs) qui renforcent la diffusion de l'énergie oscillante (amortisseurs de frottement, hydrauliques, dynamiques, en caoutchouc, etc.). Il convient de noter que l'état de résonance bref ne présente généralement pas de danger, du fait que l'intensification des oscillations du système demande un certain intervalle de temps, et lorsque ce temps est court, l'amplitude ne parvient pas à atteindre une grande valeur.

Des cas plus compliqués des oscillations (oscillations des systèmes à plusieurs degrés de liberté, des systèmes à masse continûment répartie, etc.) sont examinés dans des cours complets de la résistance des matériaux et dans des ouvrages spéciaux.

Exemple XI.5. A l'extrémité d'une poutre composée de deux profilés en U n°12 (fig. XI.14) se trouve un moteur de poids $G = 4000$ N qui engendre une charge oscillante $F =$

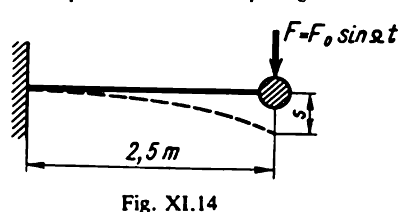


Fig. XI.14

$= F_0 \sin \Omega t$, alors que $F_0 = 1$ kN ; $\Omega = 22$ 1/s ; $I_x = 2\cdot 304 = 608$ cm^4 $= 608\cdot 10^{-8}$ m^4. Calculer la poutre.

Solution. Négligeons la masse de la poutre et les forces de résistance. Calculons la fréquence des oscillations propres :

$$\omega = \sqrt{1/(ms_{11})}.$$

Cherchons la masse : $m = 4000/9,81 = 408$ kg.

La flèche de l'extrémité de la poutre, produite par la force unitaire [cf. formule (VII.9)] égale à $F = 1\ \text{N} = 1\ \text{m}\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$,

$$s_{11} = \frac{l^3}{3EI_x} = \frac{2{,}5^3\cdot 10^{-6}}{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 608\cdot 10^{-8}} = 0{,}00428\cdot 10^{-3}\ \text{m},$$

donc

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{408\cdot 0{,}00428\cdot 10^{-3}}} = 23{,}9\ \text{s}^{-1}.$$

Etant donné que la différence entre les fréquences Ω et ω n'est pas grande, on est en présence d'un danger de résonance. Pour l'éliminer, modifions la position du moteur sur la poutre en le plaçant à 2 m de l'encastrement ; alors,

$$s_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{2^3\cdot 10^{-6}}{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 608\cdot 10^{-8}} = 0{,}0022\cdot 10^{-3}\ \text{m},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{408\cdot 0{,}0022\cdot 10^{-3}}} = 33{,}3\ \text{s}^{-1}.$$

Cette fréquence se distingue déjà sensiblement de la fréquence de la force perturbatrice Ω. Calculons les contraintes dynamiques. Le coefficient dynamique

$$K_d = 1/(1 - \Omega^2/\omega^2) = 1/(1 - 22^2/33{,}3^2) = 1{,}78.,$$

Le moment fléchissant au droit de l'encastrement

$$M = Gl + FK_d l = 4000\cdot 2 + 1000\cdot 1{,}78\cdot 2 = 11\ 560\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

Cherchons les contraintes ($W_x = 2\cdot 50{,}6 = 101{,}2\ \text{cm}^3 = 101{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$) :

$$\sigma = M/W_x = 11560/(101{,}2\cdot 10^{-6}) = 115\cdot 10^6\ \text{Pa} = 115\ \text{MPa}.$$

CHAPITRE XII

CALCUL DE LA RÉSITANCE SOUS DES CONTRAINTES CYCLIQUES (CALCUL À LA FATIGUE)

§ 99. Généralités *

Pendant leur service de nombreuses pièces de machines sont soumises à de nombreuses reprises à l'action des charges (contraintes) qui varient périodiquement dans le temps. Par exemple, un essieu de wagon travaille à la flexion et tourne avec les roues en subissant des contraintes cycliques, bien que les forces extérieures gardent leur valeur et leur direction. Les fibres de l'essieu se trouvent tantôt dans la zone tendue, tantôt dans la zone comprimée.

Il est caractéristique que l'action des charges alternatives amène la rupture par suite de la progression d'une *crique* dite *de fatigue*. L'origine du terme fatigue est due à la supposition erronée des premiers explorateurs de ce phénomène, qui pensaient que sous l'action des charges alternatives la structure du métal change.

Actuellement, il est établi que sous l'action des charges cycliques la structure du métal ne change pas. La rupture par fatigue est conditionnée par les particularités de la structure moléculaire et cristalline de la matière. Probablement, elle a à l'origine la structure hétérogène des matériaux. Les cristallites du métal ont dans des directions différentes une résistance différente. Il en résulte que sous des contraintes définies les cristallites isolés subissent des déformations plastiques.

L'alternance des charges et décharges produit l'écrouissage et augmente la fragilité du matériau. Finalement, lorsque le nombre de répétitions est grand, l'aptitude du matériau à se consolider s'épuise et dans l'un des plans de glissement des cristallites apparaît une microfissure. La crique ainsi apparue est un fort concentrateur des contraintes et l'affaiblissement de la section fait qu'elle devient l'endroit de la rupture définitive.

La surface de la cassure présente deux zones bien marquées, la zone lisse à surface rodée (zone de la progression de la crique de fatigue) et la zone de la rupture définitive à surface rugueuse.

---

* La méthodologie de calcul à la fatigue n'est pas encore unifiée de la façon nécessaire. Nous suivons les prescriptions de GOST 23207-78 (pour ce qui est de la terminologie et des notations).

La figure XII.1 représente la photographie d'un rail ayant subi la rupture. Autour de la fissure intérieure restée dans le rail après son laminage, on voit la surface lisse rodée qui s'est formée par progression de la crique de fatigue ; puis vient la surface rugueuse de la section suivant laquelle s'est produite la rupture définitive sous l'effet du fort affaiblissement de la section.

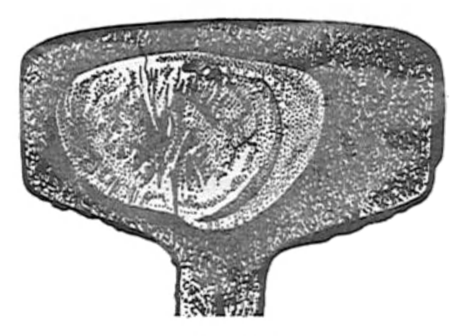


Fig. XII.1

L'apparition et le développement des criques de fatigue sont fortement influencés par les défauts de structure interne du matériau (fissures internes, inclusions de scories, etc.) et les défauts d'usinage (stries, traces de l'outil ou de la meule de rectification, etc.). Le processus de l'accumulation progressive des détériorations du métal sous l'action des contraintes variables, qui conduit à la modification des propriétés, la formation des fissures, leur développement et la rupture s'appelle *fatigue,* et la rupture sous l'effet du développement d'une telle fissure, *rupture par fatigue.* La propriété du matériau de tenir à la fatigue s'appelle *résistance à la fatigue* ou *endurance.*

Les recherches montrent que dans la plupart des cas les éléments des machines subissent la rupture sous l'action des criques de fatigue.

Dans le cas général, comme nous l'avons déjà dit au § 3, les charges et les contraintes peuvent varier dans le temps suivant des lois très compliquées. Le régime des charges variables peut être établi ou stable et instable.

En régime instable la loi de la variation des contraintes dans le temps peut être quelconque. Le régime stable est défini par la variation répétitive (périodique) des contraintes. Dans des intervalles de temps définis (périodes) les contraintes sont exactement répétées.

L'ensemble des valeurs consécutives des contraintes en une période de leur variation sous une sollicitation régulière s'appelle *cycle des contraintes.*

Les figures XII.2, *a* et *b* représentent les courbes de la variation des contraintes normales et tangentielles subies en un tour par un vilebrequin de diesel. Elles montrent que les contraintes changent d'après une loi très compliquée, mais périodique (cyclique).

L'action exercée par la forme de la courbe de variation des contraintes sur l'endurance n'est pas encore suffisamment étudiée, mais les données disponibles permettent d'admettre quand même que cette action n'est pas forte et que le rôle décisif revient aux valeurs maximale et minimale du cycle et à leur relation. Nous supposerons dans ce qui suit que la variation

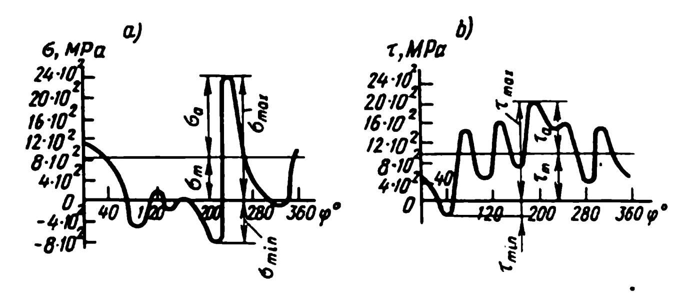


Fig. XII.2

des contraintes dans le temps est régie par une loi proche de la sinusoïde (fig. XII.3, *a*).

Le cycle des contraintes variables est défini par

1) la contrainte de valeur algébrique maximale du cycle σ_{max} ;

2) la contrainte de valeur algébrique minimale σ_{min} ;

3) la contrainte moyenne du cycle

$$\sigma_{moy} = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2. \qquad \text{(XII.1)}$$

Cette dernière est constante dans le temps (positive ou négative) ;

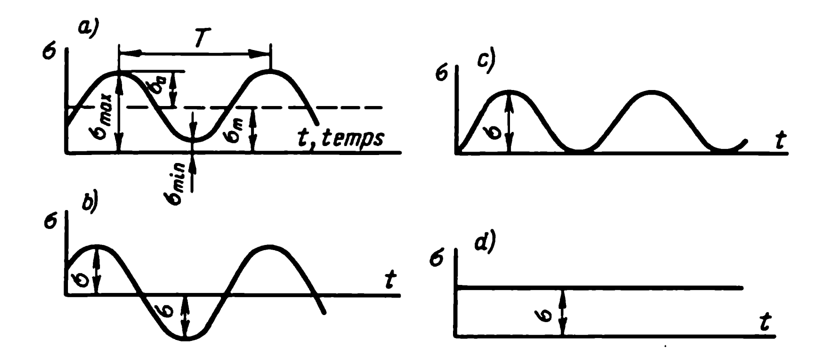


Fig. XII.3

4) l'amplitude des contraintes du cycle

$$\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2. \qquad \text{(XII.2)}$$

L'amplitude des contraintes est la valeur maximale positive de la composante variable du cycle ;

5) le coefficient d'asymétrie

$$R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max}. \qquad \text{(XII.3)}$$

Les cycles de mêmes valeurs de R sont dits *semblables*.

Les formules (XII.1), (XII.2), ainsi que la figure XII.3, impliquent que

$$\sigma_{max} = \sigma_{moy} + \sigma_a ; \qquad \text{(XII.4)}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{moy} - \sigma_a. \qquad \text{(XII.5)}$$

Dans le cas où $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, on a un *cycle symétrique* (fig. XII.3, *b*). Alors,

$$\sigma_{moy} = 0, \quad \sigma_a = \sigma, \quad R = -1.$$

Le cycle visualisé sur la figure XII.3, *c* est dit *pulsatoire à partir du zéro*. On a, alors,

$$\sigma_{max} = \sigma, \quad \sigma_{min} = 0, \quad \sigma_{moy} = \sigma/2, \quad \sigma_a = \sigma/2, \quad R = 0.$$

La *contrainte statique constante* (fig. XII.3, *d*) peut être envisagée comme un cas particulier de la contrainte statique variable à caractéristiques

$$\sigma_{max} = \sigma, \quad \sigma_{min} = \sigma, \quad \sigma_{moy} = \sigma, \quad \sigma_a = 0, \quad R = +1.$$

Tout cycle asymétrique peut être représenté comme la somme d'un cycle symétrique à contrainte maximale, égale à l'amplitude du cycle donné, et d'une contrainte constante égale à la contrainte moyenne du cycle donné (fig. XII.3, *a*). Tous les termes et relations mentionnés restent valables pour le cas des contraintes tangentielles variables si σ est remplacé par τ.

§ 100. Courbe de Wöhler du cycle symétrique. Limite d'endurance

Pour le calcul de la résistance sous l'action des charges alternatives, il faut connaître les caractéristiques mécaniques du matériau. Elles sont déterminées par essais de fatigue des éprouvettes sur des machines spéciales. Le plus simple et le plus usité est celui qui consiste à soumettre les éprouvettes à un cycle de contraintes symétrique. Le schéma de principe de la machine pour les essais par la flexion est représenté sur la figure XII.4.

L'éprouvette *1* est serrée dans la douille *2* de la broche de la machine, qui tourne à une certaine vitesse angulaire. L'extrémité de l'éprouvette porte un roulement à billes *3* qui transmet la force F de direction permanente. On voit sans peine que l'éprouvette subit l'action de la flexion à cycle symétrique. En effet, le point A le plus dangereux de la section *I—I* de l'éprouvette subit la contrainte de traction σ, la console étant fléchie la convexité en haut. Pourtant, une fois que l'éprouvette fait demi-tour, le

point A se retrouve en bas dans la zone comprimée, et la contrainte qu'il supporte devient égale à — σ. Après le demi-tour suivant le point A revient en haut, etc. Lorsque A passe par l'axe neutre, la contrainte que subit le point est nulle.

Voici l'ordre de l'essai auquel on soumet 10 éprouvettes identiques, généralement de 6 à 10 mm de diamètre, à surface polie. La première d'entre elles est soumise à une contrainte importante σ_1 pour assurer sa rupture en un nombre N_1 relativement peu grand de tours (cycles). Il s'agit, en l'occurrence, de la contrainte maximale du cycle subie par le point de la section le plus sollicité. On sait qu'en flexion la contrainte maximale est engendrée aux points extrêmes de la section ; elle se calcule d'après la formule $\sigma_{max} = M_f/W_x$. Les résultats enregistrés sont portés sur un diagramme en coordonnées σ_{max} et N (fig. XII.5).

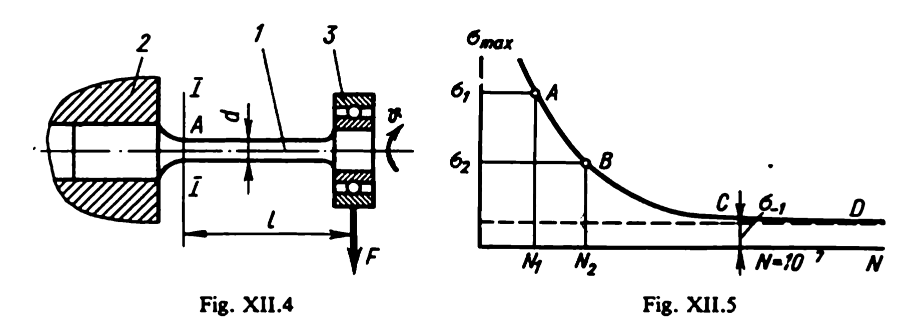


Fig. XII.4

Fig. XII.5

Après l'essai subi par la première éprouvette, on marque sur le diagramme le point A dont les coordonnées sont N_1 et $\sigma_{1,\,max}$ (ou, simplement, σ_1).

Ensuite, on traite la deuxième éprouvette en lui appliquant une contrainte σ_2 légèrement plus faible. Naturellement, elle subit la rupture après un nombre de cycles plus grand N_2. On porte donc sur le diagramme le point B de coordonnées N_2 et σ_2, etc.

Après avoir traité toutes les éprouvettes, on raccorde les points A, B, C, etc. obtenus par une ligne régulière qui porte le nom de la *courbe de fatigue* ou courbe de Wöhler. Cette courbe a cette particularité qu'à partir d'une certaine contrainte elle devient pratiquement horizontale (tronçon CD). Ceci signifie que sous une contrainte définie σ_{-1} l'éprouvette peut subir un nombre infiniment grand de cycles sans se rompre. Les essais à la température ambiante avec des éprouvettes en acier montrent que si la rupture de l'éprouvette n'est pas survenue jusqu'à $N = 10^7$ cycles (ce qui dure à peu près 54 h à la vitesse de 3000 tr/mn), l'éprouvette ne sera pas non plus rompue par un essai de plus grande durée.

La durée maximale de l'essai de fatigue donnée au préalable se nomme *base de l'essai*.

Dans les conditions ordinaires la base de l'essai pour les éprouvettes en acier est de 10 millions de cycles.

La contrainte du cycle, maximale en valeur absolue, pour laquelle la rupture de fatigue ne survient pas jusqu'à la base de l'essai s'appelle *limite d'endurance* σ_R. Pour des cycles symétriques $R = -1$, ce qui fait que la limite d'endurance est notée σ_{-1}. Pour les pièces dont le service dure peu, on introduit la notion de *limite d'endurance conventionnelle,* comme contrainte maximale en valeur absolue du cycle, qui correspond au nombre de cycles donné, inférieur au nombre de base.

D'une façon analogue, mais sur d'autres machines, on réalise des essais et établit les limites d'endurance sous l'action des forces axiales (σ_{-1}), de la torsion (τ_{-1}) et des déformations composées.

Actuellement, la limite d'endurance est établie pour de nombreux matériaux et ses valeurs sont données par les ouvrages de référence. D'après ces données, dans le cas du cycle symétrique, la limite d'endurance de la plupart des métaux est inférieure à la limite d'écoulement.

§ 101. Diagramme des contraintes limites et des amplitudes du cycle

Pour déterminer la limite d'endurance sous l'action des cycles asymétriques des contraintes, on construit des diagrammes de types divers. Les plus usités sont

1) les diagrammes des contraintes limites du cycle en coordonnées σ_{max} et σ_{moy} ;

2) les diagrammes des amplitudes limites du cycle en coordonnées σ_a et σ_{moy}.

Examinons ces diagrammes. Dans ceux du premier type, la contrainte limite qui correspond à la limite d'endurance est portée en verticale, la contrainte moyenne, en horizontale (fig. XII.6).

Au début, on marque sur l'axe σ_{max} le point C dont l'ordonnée est la limite d'endurance d'un cycle symétrique σ_{-1} (pour le cycle symétrique la contrainte moyenne est nulle). Ensuite, on détermine par expérience la limite d'endurance pour une charge asymétrique quelconque, par exemple pour σ_0, dont la contrainte est toujours la double de la moyenne.

On porte sur le diagramme le point P dont l'ordonnée est la limite d'endurance du cycle de σ_0.

Pour de nombreux matériaux σ_{-1} et σ_0 sont établies et leurs valeurs sont données par les ouvrages de référence.

D'une façon analogue, on détermine par expérience la limite d'endurance pour les cycles asymétriques à d'autres paramètres.

Les résultats sont portés sur le diagramme sous forme de points *A, B,* etc., dont les ordonnées sont les limites d'endurance des cycles correspon-

dants. Le point D qui repose également sur la bissectrice OD caractérise la contrainte limite (la charge de rupture) sous charge constante pour laquelle $\sigma_{max} = \sigma_{moy}$.

La limite d'écoulement $\sigma_{é}$ étant également dangereuse pour les matériaux plastiques, on porte sur le diagramme la ligne horizontale KL dont l'ordonnée est $\sigma_{é}$. (Pour les matériaux plastiques dont le diagramme de traction ne possède pas de palier d'écoulement, le rôle de $\sigma_{é}$ est assumé par la limite d'écoulement conventionnelle $\sigma_{0,2}$.) Par conséquent, le diagramme des contraintes limites prend finalement la forme $CAPKL$.

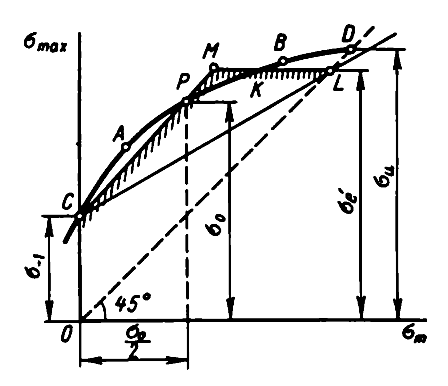


Fig. XII.6

Ordinairement, pour simplifier ce diagramme on le remplace par deux droites CM et ML, la droite CM étant menée par le point C, qui correspond au cycle symétrique, et le point P qui correspond au cycle de σ_0.

La méthode indiquée de schématisation du diagramme des contraintes limites est proposée par S. Serensen et R. Kinassochvili.

Dans les limites de la droite CM la contrainte limite du cycle (la limite d'endurance) est exprimée dans ce cas par l'équation

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0/2}\sigma_{moy} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma)\sigma_{moy} \qquad \text{(XII.6)}$$

ou

$$\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{moy} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{moy}, \qquad \text{(XII.7)}$$

où

$$\psi_\sigma = (2\sigma_{-1} - \sigma_0)/\sigma_0. \qquad \text{(XII.8)}$$

ψ_σ s'appelle coefficient de sensibilité du matériau à l'asymétrie du cycle. Les valeurs de ψ_σ et, d'une façon analogue, celles du coefficient de torsion $\psi_\tau = (2\tau_{-1} - \tau_0)/\tau_0$ sont consignées sur le tableau XII.1.

Coefficients	σ_u, MPa				
	320 à 420	400 à 500	600 à 750	700 à 1050	1050 à 1250
ψ_σ (flexion, traction, compression)	0	0	0,05	0,10	0,20
ψ_τ (torsion)	0	0	0	0,05	0,10

Pour construire le diagramme des amplitudes limites du cycle, on porte en axe vertical l'amplitude des contraintes, et en axe horizontal, la contrainte moyenne σ_{moy} (fig. XII.7).

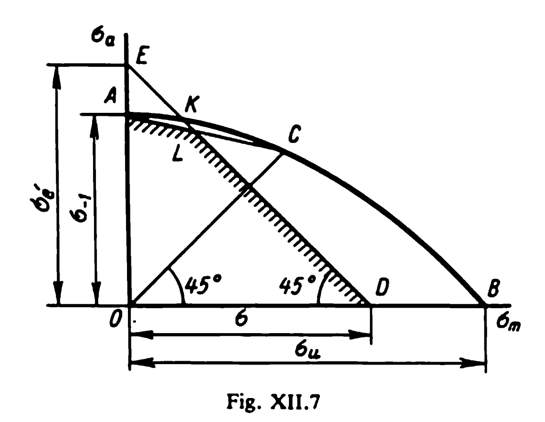


Fig. XII.7

Le point *A* du diagramme correspond à la limite d'endurance sous l'action d'un cycle asymétrique, du fait que dans ce cas $\sigma_{moy} = 0$.

Le point *B* correspond à la charge de rupture sous une contrainte constante, étant donné que dans ces conditions $\sigma_a = 0$.

Le point *C* correspond à la limite d'endurance pour le cycle de σ_0 puisque $\sigma_a = \sigma_{moy}$.

Les autres points du diagramme correspondent aux rapports différents entre σ_a et σ_{moy}.

En tout point de la courbe limite *ACB* la somme des coordonnées donne la limite d'endurance pour la contrainte moyenne donnée du cycle [cf. la formule (XII.4)] :

$$\sigma_R = \sigma^u_{max} = \sigma^u_{moy} + \sigma^u_a.$$

Pour les matériaux plastiques la contrainte limite ne doit pas dépasser la limite d'écoulement $\sigma_a + \sigma_{moy} \leqslant \sigma_e$. C'est pourquoi sur le diagramme des

contraintes limites on porte la droite *DE* établie d'après l'équation $\sigma_a + \sigma_{moy} = \sigma_t$.

Le diagramme des contraintes limites définitif est de la forme *AKD*.

Dans la pratique, on utilise ordinairement le diagramme approché $\sigma_a - \sigma_{moy}$ dressé d'après trois points *A*, *C* et *D* et composé de deux tronçons rectilignes *AL* et *LD* (méthode de Serensen-Kinassochvili). Le point *L* s'obtient par intersection des droites *DE* et *AC*.

Le calcul d'après les diagrammes des contraintes limites et les diagrammes des amplitudes limites du cycle, les procédés d'approximation étant les mêmes, donne le même résultat.

§ 102. Facteurs intervenant dans la limite d'endurance

Les expériences montrent que la limite d'endurance est sensiblement influencée *par la concentration des contraintes, les dimensions des sections droites des pièces, l'état de surface, le caractère du traitement*, etc.

Examinons ces facteurs de plus près.

Concentration des contraintes. Les modifications brusques de la forme de la pièce, les trous, les gorges, les entailles, etc. diminuent sensiblement la limite d'endurance par rapport à celle des éprouvettes cylindriques lisses.

Cette diminution est prise en compte par le *coefficient efficace de concentration des contraintes* établi par voie expérimentale. A cet effet, on prend deux séries d'éprouvettes identiques (de 10 pièces chacune), les premières étant sans concentrateurs des contraintes, et les deuxièmes comportant de tels concentrateurs, puis on détermine pour un cycle symétrique les limites d'endurance des éprouvettes sans concentrateurs σ_{-1} et avec de tels concentrateurs σ_{-1k}. Le rapport

$$K_\sigma = \sigma_{-1}/\sigma_{-1k} \qquad \text{(XII.9)}$$

détermine le coefficient efficace de concentration des contraintes. Les expériences montrent que ce coefficient diffère de sa valeur théorique α_σ *, le premier dépendant non seulement de la forme de la pièce, mais aussi du matériau.

Les valeurs de K_σ sont fournies par les ouvrages de référence. A titre d'exemple, la figure XII.8 donne les valeurs du coefficient de concentration pour la flexion des arbres à gradins à rapport $D/d = 2$, à raccordement par congé de rayon *r*. Ces données sont obtenues par les essais sur des éprouvettes de $d = 30$ à 50 mm en aciers à charge de rupture $\sigma_u = 500$ et

* Les valeurs du coefficient théorique sont établies soit théoriquement (par la méthode de la théorie de l'élasticité), soit expérimentalement par comparaison des charges de rupture pour des éprouvettes en matériaux très fragiles sans concentration et avec concentration des contraintes.

1200 MPa. La courbe du coefficient de concentration théorique α_σ est portée sur ce même diagramme en pointillé.

La figure XII.9 donne les valeurs des coefficients α_τ et K_τ pour la torsion, et la figure XII.10, pour la traction-compression. Pour les coeffi-

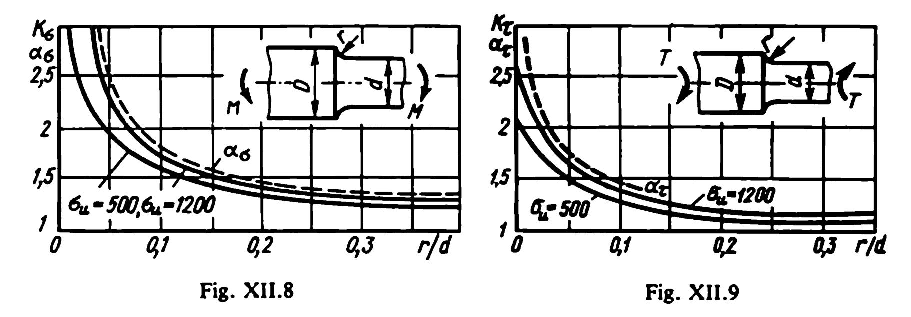


Fig. XII.8 Fig. XII.9

cients de concentration des contraintes avec d'autres rapports D/d, il faut employer la formule

$$K_\sigma = 1 + \xi[(K_\sigma)_0 - 1], \qquad \text{(XII.10)}$$

où $(K_\sigma)_0$ est le coefficient efficace de concentration des contraintes qui correspond au rapport $D/d = 2$; ξ, le coefficient de correction déterminé

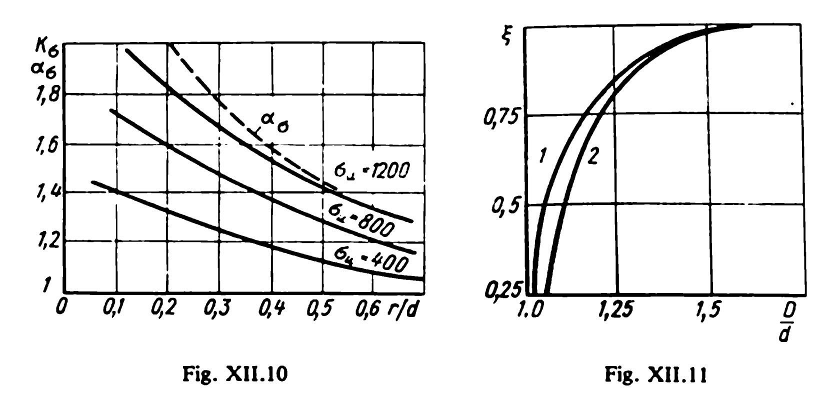


Fig. XII.10 Fig. XII.11

d'après la figure XII.11, la courbe *1* donnant la valeur de ξ en flexion, et la courbe *2*, en torsion.

Ci-dessous sont données les valeurs de K_σ et K_τ pour les arbres à rainures de clavette (une ou deux)

σ_u, MPa		500	750	1000	
K_σ		1,5	1,75	2,0	
σ_u, MPa	600	700	800	900	1000
K_τ	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9

Dans les cas où les données empiriques relatives au coefficient de concentration des contraintes ne sont pas disponibles, alors que les valeurs du coefficient théorique sont connues, pour calculer K_σ, on peut utiliser la formule empirique suivante : $K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1)$, où q est ce qu'on appelle le coefficient de susceptibilité du matériau à l'entaille $q = (K_\sigma - 1)/(\alpha_\sigma - 1)$. Pour les aciers alliés à haute résistance la valeur de q est proche de 1. Pour les aciers de construction en moyenne q = 0,6 à 0,8, les aciers plus résistants possédant des q de plus grande valeur. Pour la fonte grise q est presque nul. Autrement dit, la fonte grise est insensible à la concentration des contraintes. Des données plus détaillées sur la valeur de q des aciers sont données par la figure XII.12.

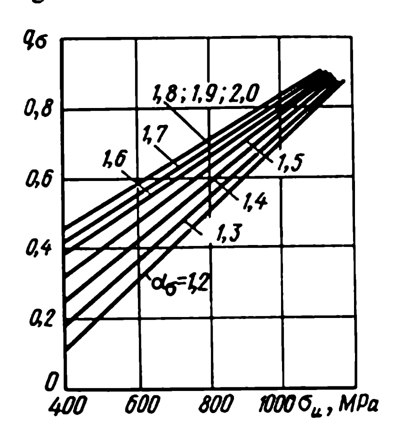


Fig. XII.12

Dimensions absolues de la section droite de la pièce. D'après les expériences, *plus ces dimensions sont grandes, plus la limite d'endurance est faible.* Le quotient de la limite d'endurance de la pièce de diamètre d par la limite d'endurance de l'éprouvette de laboratoire de diamètre d_0 = 6 à 10 mm s'appelle *coefficient d'influence des dimensions absolues de la section droite* (facteur de similitude) pour les contraintes normales : $K_d = (\sigma_{-1})_d/(\sigma_{-1})_{d_0}$.

Les coefficients d'influence des dimensions absolues de la section peuvent également être déterminés en traitant des éprouvettes à concentrateurs des contraintes. Dans ce cas,

$$K_d = (\sigma_{-1k})_d/(\sigma_{-1k})_{d_0}.$$

La pièce de dimension d, tout comme l'éprouvette de dimension d_0 doit alors avoir une configuration géométriquement semblable.

La figure XII.13 représente le graphique des valeurs de K_d. La courbe *1* correspond à une pièce en acier à carbone sans concentrateurs ; la courbe *2*, à une pièce en acier allié en l'absence des concentrateurs et en acier à car-

bone, qui en comporte ; la courbe *3*, à une pièce en acier allié en présence des concentrateurs ; la courbe *4*, à un acier quelconque et à forte concentration des contraintes (par exemple, sous forme d'entaille).

Les données expérimentales sur les coefficients K_{d_τ} (torsion) étant insuffisantes, on peut adopter approximativement $K_{d_\tau} = K_d$. Il convient de noter que les données empiriques sur la détermination de K_d sont encore insuffisantes.

Etat de surface et consolidation de la couche superficielle. Les expériences montrent qu'un *traitement superficiel grossier de la pièce diminue la limite d'endurance.* L'influence de l'état de surface est associée à la modification de la microgéométrie (rugosité) et à l'état du métal de la couche superficielle, ce qui à son tour dépend du mode d'usinage.

Pour évaluer l'influence de l'état de surface sur la limite d'endurance, on introduit le coefficient K_F appelé coefficient d'influence de la rugosité, égal au rapport de la limite d'endurance de l'éprouvette à rugosité donnée (σ_{-1n}) à la limite d'endurance de l'éprouvette à l'état de surface pas plus rugueux que $R_a = 0{,}32$:

$$K_F = \sigma_{-1n}/\sigma_{-1}.$$

La figure XII.14 représente le graphique des valeurs de K_F en fonction de la charge de rupture σ_u de l'acier et du mode d'usinage de la surface. Les courbes correspondent aux modes d'usinage suivants : *1*, polissage ; *2*, rectification ; *3*, tournage fin ; *4*, tournage grossier ; *5*, présence de la calamine.

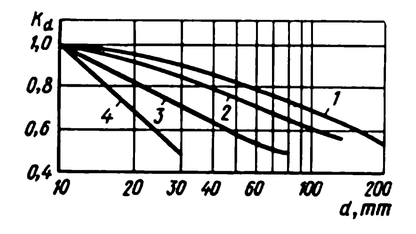


Fig. XII.13

Fig. XII.14

Les divers modes de consolidation superficielle (écrouissage, cimentation, nitruration, trempe superficielle aux courants HF, etc.) augmentent sensiblement la limite d'endurance. Ceci est pris en compte par l'introduction du coefficient d'influence de la consolidation superficielle K_v. Cette dernière permet de rendre 2 ou 3 fois plus forte la résistance à la fatigue pour les pièces des machines. Les valeurs du coefficient K_v sont fournies par les ouvrages de référence.

§ 103. Coefficient de sécurité dans le cycle symétrique

L'influence commune des facteurs dénombrés fait que pour une pièce la limite d'endurance est inférieure à celle d'une éprouvette de laboratoire. Dans le cas des pièces elle se calcule donc d'après l'expression

$$(\sigma_{-1k})_d = \sigma_{-1} K_d K_F / K_\sigma. \qquad \text{(XII.11)}$$

En connaissant la contrainte maximale subie par la pièce dans un cycle symétrique, on peut trouver le coefficient de sécurité vis-à-vis de la fatigue

$$n_\sigma = (\sigma_{-1k})_d / \sigma_{\max}. \qquad \text{[XII.12]}$$

D'une façon analogue, on calcule le coefficient de sécurité à la torsion

$$n_\tau = (\tau_{-1k})_d / \tau_{\max}. \qquad \text{(XII.13)}$$

Dans le cas d'une contrainte composée le coefficient de sécurité se calcule ordinairement d'après la formule [IX.43] :

$$n = n_\sigma n_\tau / \sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2},$$

où n_σ et n_τ sont déterminés par les formules [XII.12] et (XII.13).

§ 104. Coefficient de sécurité dans le cycle asymétrique

Le calcul des contraintes dans un cycle asymétrique est guidé par le diagramme simplifié *CML* des contraintes limites de l'éprouvette (cf. fig. XII.6 et XII.15).

En se guidant par la concentration des contraintes, l'influence des dimensions absolues de la section droite et l'état de surface, on construit le diagramme des contraintes limites de la pièce. Conformément aux données des expériences l'influence des facteurs mentionnés est associée seulement à la composante variable du cycle, c'est-à-dire à l'amplitude σ_a. Pour une éprouvette l'amplitude limite des contraintes se détermine d'après la formule (XII.7)

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_{moy} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{moy}. \qquad \text{(XII.14)}$$

Ce qui vient d'être dit fait que pour une pièce l'amplitude limite des contraintes s'écrit

$$(\sigma_{ak})_d = \sigma_a K_d K_F / K_\sigma = (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{moy}) K_d K_F / K_\sigma. \qquad \text{(XII.15)}$$

Pour la pièce l'équation de la ligne des contraintes limites *EN* (fig. XII.15) devient

$$(\sigma'_{Rk})_d = (\sigma'_{ak})_d + \sigma'_{moy} = (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma'_{moy})(K_d K_F / K_\sigma) + \sigma'_{moy}. \qquad \text{(XII.16)}$$

Ici les coordonnées primées désignent les coordonnées courantes.

Calculons maintenant le coefficient de sécurité de la pièce soumise aux contraintes variables σ_{max} et σ_{moy} (point R du diagramme, fig. XII.15).

Supposons qu'avec l'augmentation de la charge subie par la pièce le quotient $\sigma_{max}/\sigma_{moy}$ = const. Une telle sollicitation est dite *simple*. Dans ce cas, le point limite qui correspond à la rupture est S.

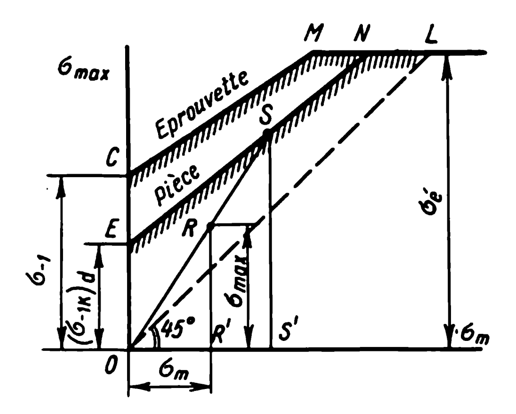


Fig. XII.15

Le coefficient de sécurité est égal au rapport des segments SS' et RR'

$$n_{\sigma} = SS'/RR' = (\sigma_{Rk})_d/\sigma_{max}. \qquad \text{(XII.17)}$$

La quantité $(\sigma_{Rk})_d$ (ordonnée au point S) s'obtient par résolution commune des équations de la ligne EN et de la ligne OS. L'équation de cette dernière est de la forme

$$\sigma'_{max} = \sigma_{max}\sigma'_{moy}/\sigma_{moy} \qquad \text{(XII.18)}$$

(les coordonnées primées sont les coordonnées courantes).

En égalant les deuxièmes membres des formules (XII.16) et (XII.18), on obtient

$$(\sigma_{-1} - \psi_{\sigma}\sigma'_{moy})(K_dK_F/K_{\sigma}) + \sigma'_{moy} = \sigma_{max}\sigma'_{moy}/\sigma_{moy},$$

d'où

$$\sigma'_{moy} = \sigma_{-1}\Big/\left(\psi_{\sigma} - \frac{K_{\sigma}}{K_dK_F} + \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{moy}}\,\frac{K_{\sigma}}{K_dK_F}\right).$$

En portant la valeur de σ'_{moy} dans la formule (XII.16) ou (XII.18), on trouve l'ordonnée du point S:

$$(\sigma_{Rk})_d = \sigma_{-1}\sigma_{max}/[\sigma_a K_{\sigma}/(K_dK_F) + \psi_{\sigma}\sigma_{moy}]. \qquad \text{(XII.19)}$$

Donc, en vertu de la formule (XII.17), on obtient pour le coefficient de sécurité la relation définitive suivante :

$$n_{\sigma} = \sigma_{-1}/[\sigma_a K_{\sigma}/(K_dK_F) + \psi_{\sigma}\sigma_{moy}]. \qquad \textbf{[XII.20]}$$

D'une façon analogue, pour la torsion

$$n_\tau = \tau_{-1}/[\tau_a K_\tau/(K_d K_F) + \psi_\tau \tau_{moy}].$$ **[XII.21]**

Dans le cas d'un état de contrainte composé engendré, par exemple, par la torsion avec flexion, le coefficient de sécurité se calcule d'après [IX.43] :

$$n = n_\sigma n_\tau / \sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2},$$

et les valeurs de n_σ et n_τ, d'après [XII.20] et [XII.21].

En plus du coefficient de sécurité par rapport à la résistance à la fatigue, il faut encore calculer le coefficient de sécurité par rapport à la résistance aux déformations plastiques, le point *S* pouvant se trouver au-dessus de la ligne *ML*. Ce coefficient de sécurité est déterminé par les formules

$$n_\sigma = \sigma_e/\sigma_{max} = \sigma_e/(\sigma_a + \sigma_{moy}) ; \quad \text{(XII.22)}$$

$$n_\tau = \tau_e/\tau_{max} = \tau_e/(\tau_a + \tau_{moy}). \quad \text{(XII.23)}$$

Le coefficient de sécurité de calcul (réel) est celui qui est le plus petit de ceux établis d'après les formules [XII.20] ou (XII.22), ou encore, dans le cas de la torsion, respectivement d'après [XII.21] ou (XII.23). Pour le calcul à la flexion avec torsion, dans la formule du coefficient de sécurité général il convient de porter la plus petite des valeurs n_σ et n_τ calculées comme on vient de l'indiquer.

§ 105. Mesures pratiques pour l'amélioration de la résistance à la fatigue

Dans la conception des pièces soumises à des contraintes variables, il est recommandé de prendre les mesures suivantes pour améliorer la résistance à la fatigue :

1. Employer des matériaux homogènes à grains fins, privés de concentrateurs des contraintes internes (criques, bulles de gaz, inclusions non métalliques, etc.).

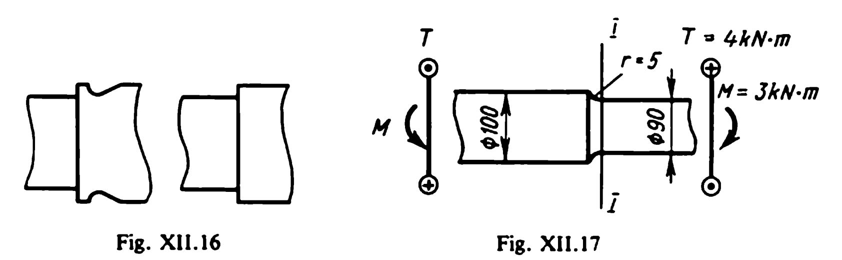


Fig. XII.16 Fig. XII.17

2. Prévoir des configurations des pièces, qui réduiraient la concentration des contraintes. Il faut exclure les raccords entre les dimensions différentes sans courbes de congé. Dans certains cas, il est recommandé d'éta-

blir des entailles de décharge spéciales, appelées déconcentrateurs des contraintes. Aussi, si au droit d'un raccord brusque on réalise dans la partie plus grosse de la pièce un congé progressif (fig. XII.16), les contraintes locales deviennent sensiblement plus faibles.

3. Assurer un traitement superficiel soigneux, y compris le polissage, pour éliminer les stries les plus infimes susceptibles d'amorcer une crique de fatigue.

4. Appliquer des méthodes spéciales d'amélioration de la résistance à la fatigue (consolidation superficielle, sollicitation des pièces par des charges élevées de courte durée, etc.).

La consolidation superficielle par écrouissage permet d'augmenter à elle seule de 2 à 3 fois, avec des frais négligeables, la durée de service des pièces. Ceci est équivalent à doubler ou à tripler les objets fabriqués. Cet exemple rend clair l'énorme effet économique que peuvent assurer une conception et une technologie convenables des pièces de machines.

Exemple XII.1. Calculer à la fatigue un arbre à congé $r = 5$ mm (fig. XII.17). Sa section droite subit l'action du moment fléchissant $M = 3$ kN·m ; le moment de torsion $T =$ $= 4$ kN·m. Le matériau de l'arbre : acier 45 ; $\sigma_u = 610$ MPa ; $\sigma_{\ell} = 360$ MPa ; $\sigma_{-1} =$ $= 250$ MPa ; $\tau_{\ell} = 210$ MPa ; $\tau_{-1} = 150$ MPa.

La surface de l'arbre est rectifiée, le coefficient d'influence de la rugosité de la surface est donc $K_F = 0{,}92$ (cf. fig. XII.14).

Admettre que la contrainte de flexion varie suivant un cycle symétrique, et celle de torsion, suivant un cycle partant de zéro.

Solution. Calculons les contraintes nominales

$$\sigma_{max} = M/W_x = 3\cdot 10^{-3}/(0{,}1\cdot 9^3\cdot 10^{-6}) = 41{,}1 \text{ MPa} ;$$
$$\tau_{max} = T/W_p = 4\cdot 10^{-3}/(0{,}2\cdot 9^3\cdot 10^{-6}) = 27{,}5 \text{ MPa}.$$

Cherchons les amplitudes et les contraintes moyennes du cycle : $\sigma_{moy} = 0$; $\sigma_a =$ $= 41{,}1$ MPa ; $\tau_{moy} = \tau_a = 13{,}85$ MPa.

Déterminons les coefficients de concentration des contraintes. D'après le graphique de la figure XII.8 avec $r/d = 5/90 = 0{,}055$ et $D/d = 2$ on a $(K_\sigma)_0 = 1{,}8$. Compte tenu que, dans notre cas, $D/d = 100/90 = 1{,}11$ et en utilisant le graphique de la figure XII.11, trouvons le coefficient de correction $\xi = 0{,}7$. Alors, la formule (XII.10) donne

$$K_\sigma = 1 + 0{,}7(1{,}8 - 1) = 1{,}56.$$

D'après la figure XII.13 (courbe *1*) pour un arbre de $d = 90$ mm le coefficient d'influence des dimensions absolues $K_d = 0{,}70$.

Calculons le coefficient de concentration des contraintes en torsion. Le graphique (cf. fig. XII.9) avec $r/d = 0{,}055$ et $D/d = 2$ amène $(K_\tau)_0 = 1{,}4$.

Compte tenu que dans notre cas $D/d = 1{,}11$, trouvons d'après le graphique (cf. fig. XII.11) le coefficient de correction $\xi = 0{,}58$ (suivant la courbe *2*). Alors, la formule (XII.10) conduit à

$$K_\tau = 1 + 0{,}58(1{,}4 - 1) = 1{,}23.$$

Adoptons pour la torsion le même coefficient d'influence des dimensions absolues qu'en flexion : $K_\tau = 0{,}70$.

Calculons le coefficient de sécurité :

a) d'après la limite d'endurance :

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a/(K_d K_F) + \psi_\sigma \sigma_{moy}} =$$

$$= \frac{250}{1,56 \cdot 41,1/(0,70 \cdot 0,92) + 0} = 2,54 \,;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \tau_a/(K_d K_F) + \psi_\tau \tau_{moy}} =$$

$$= \frac{150}{1,23 \cdot 13,85/(0,70 \cdot 0,92) + 0} = 57,5 \,;$$

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2,54 \cdot 5,75}{\sqrt{2,54^2 + 5,75^2}} = 2,35 \,;$$

b) d'après la limite d'écoulement :

$$n'_\sigma = \sigma_{é}/\sigma_{max} = 360/41,1 = 8,7 \,; \qquad n'_\tau = \tau_{é}/\tau_{max} = 210/27,5 = 7,65 \,;$$

$$n' = 8,7 \cdot 7,65/\sqrt{8,7^2 + 7,65^2} = 5,7.$$

Nous voyons que le coefficient de sécurité minimal correspond à la limite d'endurance $n = 2,35$. Il convient de le comparer avec le coefficient de sécurité normalisé n_{adm}, dont la valeur est établie en appliquant les indications du § 11.

En admettant que la précision de la détermination des contraintes est moyenne, on peut retenir $n_1 = 1,3$; en supposant que le niveau technologique est usuel, le degré d'homogénéité du matériau et les dimensions de la pièce sont moyens, adoptons $n_2 = 1,5$. Convenons que le degré de responsabilité est moyen et prenons $n_3 = 1,3$. Alors, le coefficient de sécurité normalisé total s'écrit

$$n_{adm} = 1,3 \cdot 1,5 \cdot 1,3 = 2,53.$$

Ainsi, dans l'exemple considéré le coefficient de sécurité réel ($n = 2,35$) est un peu inférieur à celui établi par les normes ; il faut donc soit augmenter le diamètre, soit employer un acier plus résistant.

CHAPITRE XIII

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX AUX DÉFORMATIONS PLASTIQUES

§ 106. Modèles de calcul du matériau élasto-plastique

Jusque-là pour composer les équations de calcul nous avons appliqué la loi de Hooke. Les diagrammes de traction (compression) montrent que la loi de Hooke n'est valable que tant que les contraintes ne dépassent pas la limite de proportionnalité. En admettant une certaine imprécision, nous avons utilisé la loi de Hooke jusqu'à des contraintes égales à la limite d'écoulement. Pourtant, pour une pièce, atteindre cette limite en un certain point, bien que le plus dangereux, n'entraîne pas encore la rupture ou des déformations qui rendraient impossible son service ultérieur. Les déformations plastiques font travailler des parties peu sollicitées du matériau, ce qui rend possible l'augmentation de la charge admissible de la construction.

La déformation plastique de 0,2 % admise en établissant la limite d'écoulement, n'est pas une limite et dans de nombreux cas elle peut être augmentée.

Pour réaliser des calculs qui rendraient compte des déformations plastiques du matériau, il faut établir la relation entre les contraintes et les déformations (dresser le diagramme $\sigma-\varepsilon$). Ce diagramme doit être simple au possible, tout en traduisant les propriétés principales du matériau.

Les diagrammes $\sigma-\varepsilon$ réels peuvent être rangés suivant trois types (fig. XIII.1) :

a) diagramme de la figure XIII.1, *a*, caractéristique des matériaux fragiles (fonte, fonderie fragile) ;

b) diagramme à palier d'écoulement bien marqué des matériaux très plastiques (aciers à bas carbone) (fig. XIII.1, *b*) ;

c) diagramme de la figure XIII.1, *c*, caractéristique de l'acier à plasticité faible ou moyenne, ainsi que des métaux non ferreux et de leurs alliages à plasticité aussi bien moyenne qu'élevée.

Pour les matériaux fragiles, les écarts de la loi de Hooke sont relativement peu grands et en calculant les pièces en tels matériaux, on peut ne pas tenir compte de leurs déformations plastiques ; ces dernières étant très faibles, on admet que, jusqu'à la rupture, la loi de Hooke est observée (fig. XIII.1, *d*).

Pour le calcul des pièces en matériaux très plastiques (fig. XIII.1, *b*), le diagramme adopté rendant compte de leurs déformations est celui de la figure XIII.1, *e,* c'est-à-dire que la consolidation du matériau n'est pas prise en considération du fait que les contraintes égales à la limite d'écoulement engendrent des déformations plastiques importantes et des déplacements de grande valeur, qui rendent impossible le service ultérieur de la pièce. Il arrive qu'on emploie le diagramme OCB encore plus simple (diagramme de Prandtl), c'est-à-dire on admet que le matériau est *parfaitement plastique.* Sous cette hypothèse bien simple sur les propriétés du matériau, il devient possible de résoudre les problèmes les plus compliqués de la plasticité, ceux de l'état de contrainte composé, des systèmes hyperstatiques.

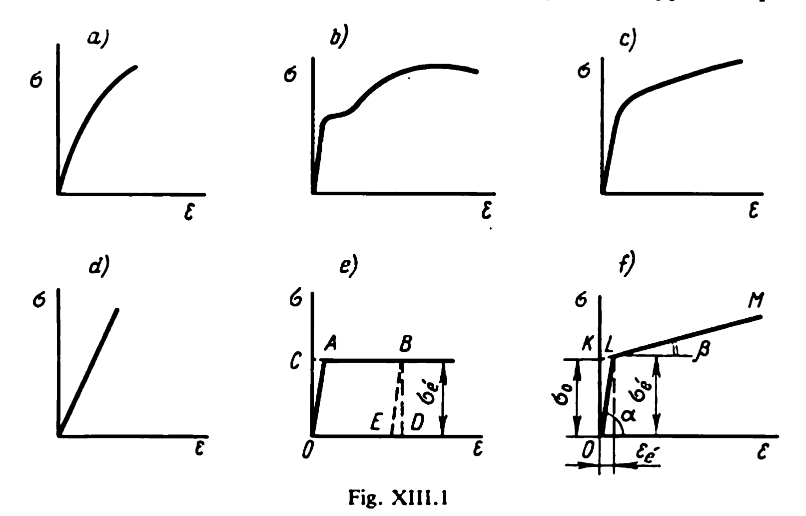


Fig. XIII.1

Dans ce qui suit, nous résoudrons les problèmes les plus simples en appliquant les diagrammes de ce type.

Pour les matériaux de plasticité moyenne, le diagramme de calcul des déformations plastiques est représenté sur la figure XIII.1, *f.* Il rend compte de la consolidation du matériau.

On admet que jusqu'au point *L* le matériau se déforme suivant la loi de Hooke, après le point *L* sa déformation devient plastique (droite *LM*). Certaines recherches sont réalisées en appliquant le diagramme OKM (matériaux plastiques rigides).

Il convient de noter que dans le domaine des déformations plastiques les lois de charge et de décharge diffèrent, la loi de charge étant non linéaire, alors que celle de décharge est toujours linéaire. Sur la figure XIII.1, *e* la loi de charge est caractérisée par la ligne *OAB,* la loi de décharge, par la ligne *BE* toujours parallèle à *OA*. La déformation complète *OD* se compose de deux parties, plastique *OE* et élastique *ED,* qui disparaît avec la suppression de la charge.

Il faut également noter que l'étude des déformations plastiques, tout comme celle des déformations élastiques, doit envisager deux cas :

1) *déformations faibles,* petites devant les dimensions des corps sollicités ;

2) *déformations fortes,* lorsqu'il n'est pas permis de négliger les changements des dimensions des corps et les distances entre les points d'application des forces, etc.

Dans ce qui suit, nous examinerons les déformations plastiques faibles. Nous ne considérerons également que des charges statiques, appliquées une seule fois, étant donné que sous l'action des charges répétées, il faut déterminer les déformations plastiques produites dans la pièce par chaque sollicitation nouvelle. Pour ce qui est des pièces soumises aux sollicitations périodiques, elles doivent être calculées à la fatigue.

§ 107. Calcul des systèmes hyperstatiques sollicités à la traction-compression compte tenu de la plasticité du matériau

Considérons l'exemple XI.11 du § 20 (fig. XIII.2). En le résolvant sous l'hypothèse que les déformations sont élastiques, c'est-à-dire que les contraintes ne dépassent pas la limite de proportionnalité, nous avons

$$N_1 = N_3 = 0{,}4F\,; \qquad N_2 = 0{,}2F.$$

L'aire de la section droite des barres étant la même, la contrainte subie par les barres extrêmes $\sigma_1 = \sigma_3 = 0{,}4F/A$ est deux fois plus grande que la

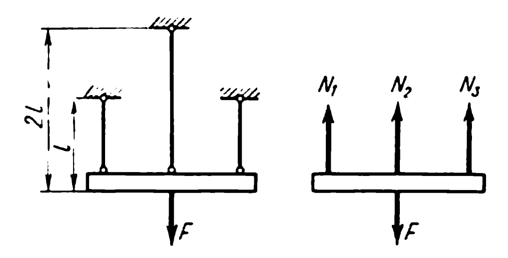


Fig. XIII.2

moyenne $\sigma_2 = 0{,}2F/A$. La charge dangereuse * $F_{\acute{e}}$ est déterminée en égalant les contraintes dans les barres extrêmes à la limite d'écoulement :

$$F_{\acute{e}} = \sigma_{\acute{e}}A/0{,}4 = 2{,}5\,\sigma_{\acute{e}}A. \qquad \text{(XIII.1)}$$

* Dans le calcul d'après l'état élastique on considère comme dangereuse la charge à laquelle, ne serait-ce que dans une seule barre, les contraintes atteignent la limite d'écoulement. Certes, le terme « dangereuse » est adopté par convention.

En admettant que la plasticité du matériau est parfaite, cherchons maintenant comment se comporte le système avec l'augmentation de la charge (cf. fig. XIII.1, *e*).

Malgré l'accroissement de la charge, les efforts dans les barres extrêmes n'augmentent pas en restant égaux à $\sigma_t A$. Quant à l'effort dans la barre du milieu, il augmente tant que les contraintes qui la sollicitent n'atteignent la limite d'écoulement. Une fois que dans toutes les trois barres les efforts deviennent égaux à $\sigma_t A$, le pouvoir portant du système se trouve épuisé. Ses conditions d'équilibre à l'état limite amènent

$$F_u = 3\sigma_t A. \qquad \text{(XIII.2)}$$

En comparant cette expression avec (XIII.1), on voit que, compte tenu de la plasticité du matériau, la charge limite obtenue est plus grande que la charge dangereuse définie par le calcul d'après l'état élastique.

Considérons maintenant le système représenté sur la figure XIII.3. En calculant les efforts dans ses barres lors du travail du matériau au stade

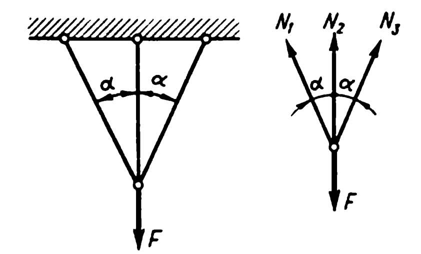


Fig. XIII.3

élastique, on établit sans peine que la barre la plus chargée est celle du milieu (résolvez ce problème vous-mêmes). La limite d'écoulement du matériau de cette barre détermine précisément la charge dangereuse du système

$$F_t = \sigma_t A\,(2\cos^3\alpha + 1).$$

Pour calculer ce système compte tenu des déformations plastiques, il faut adopter comme état limite un état pour lequel les contraintes supportées par les trois barres atteignent la limite d'écoulement, et les efforts, la quantité $\sigma_t A$.

Les conditions d'équilibre de la partie rejetée permettent d'obtenir

$$\Sigma Y = 0\ ;\ \sigma_t A + 2\sigma_t \cos\alpha = F_u.$$

La charge limite calculée est

$$F_u = \sigma_t A\,(2\cos\alpha + 1) > F_t.$$

Il s'ensuit que *si l'on tient compte des déformations plastiques, la charge limite d'un système hyperstatique est plus grande que celle définie*

par le calcul d'après l'état élastique. Sous l'action des charges statiques ceci permet également d'augmenter dans des cas déterminés la charge admissible

$$F_{adm} = F_u/n_{adm}.$$

Or, en calculant d'après l'état élastique, on a

$$F_{adm} = F_é/n'_{adm}.$$

Le rapport des charges admissibles calculées par les deux méthodes indiquées n'est pas égal au rapport $F_u/F_é$, le coefficient de sécurité n'_{adm} étant adopté, en règle générale, plus grand de 15 à 20 % que n_{adm}. Ainsi, lorsqu'on passe au calcul rendant compte des déformations plastiques, le gain en charge admissible (ou en poids du matériau dans le calcul d'étude) est quelque peu inférieur à celui qui se présente à première vue, lorsqu'on compte les charges dangereuse $F_é$ et limite F_u.

Il convient de noter que pour un système isostatique dont les éléments travaillent à la traction (compression), les valeurs de $F_é$ et F_u coïncident.

§ 108. Torsion plastique d'une barre de section circulaire

Dans le cas de la torsion élastique d'une barre de section circulaire (cf. § 36), les contraintes maximales aux points du contour de la section sont

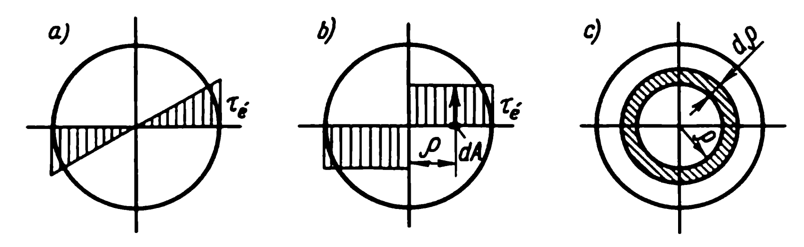


Fig. XIII.4

déterminées par la formule

$$\tau_{max} = T/W_p. \qquad \text{(XIII.3)}$$

Le moment de torsion dangereux s'obtient à partir de la condition que les contraintes maximales sont égales à la limite d'écoulement (fig. XIII.4, *a*) :

$$T_é = \tau_é W_p = \tau_é \pi d^3/16 \approx \tau_é 0{,}2d^3. \qquad \text{(XIII.4)}$$

Or, pour un matériau plastique, ce moment n'est pas une limite. L'augmentation du moment de torsion peut se poursuivre par suite de la croissance des contraintes aux points intérieurs moins chargés de la section.

L'état limite d'un matériau plastique parfait est celui où les contraintes en tous les points de la section deviennent égales à la limite d'écoulement (fig. XIII.4, *b*).

Composons l'expression du moment de torsion limite en tant que moment résultant des forces tangentielles intérieures engendrées dans la section à l'état limite

$$T_u = \int_A \tau_{é} \mathrm{d}A\rho. \qquad \text{(XIII.5)}$$

Etant donné que $\mathrm{d}A = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ (l'aire de l'anneau élémentaire, fig. XIII.4, *c*), il vient

$$T_u = 2\pi\tau_{é} \int_0^r \rho^2 \mathrm{d}\rho \qquad \text{(XIII.6)}$$

ou

$$T_u = 2/3\ \pi r^3 \tau_{é} = W_{p,\,\mathrm{pl}}\tau_{é}. \qquad \text{(XIII.7)}$$

Ici

$$W_{p,\,\mathrm{pl}} = 2/3\ \pi r^3 = \pi d^3/12. \qquad \textbf{[XIII.8]}$$

La quantité $W_{p,\,\mathrm{pl}}$ s'appelle *moment plastique de résistance à la torsion*.

En comparant les formules (XIII.7) et (XIII.4), on voit que le moment de torsion limite, compte tenu de la plasticité du matériau, est plus grand que le moment dangereux qui ne rend compte que des déformations élastiques. Cette relation vaut

$$T_u/T_{é} = W_{p,\,\mathrm{pl}}/W_p = (\pi d^3/12)(16\pi d^3) = 4/3. \qquad \text{(XIII.9)}$$

Les expériences montrent que le moment de torsion limite calculé d'après la formule (XIII.7) est très proche de la valeur empirique.

Sans donner la déduction, indiquons seulement que pour une section annulaire de diamètre extérieur D et intérieur d, le moment plastique de la résistance à la torsion s'écrit

$$W_{p,\,\mathrm{pl}} = \pi D^3(1 - c^3)/12,$$

où

$$c = d/D.$$

Il est recommandé au lecteur de déduire lui-même cette formule.

§ 109. Flexion plastique des poutres isostatiques

En flexion plastique, on adopte comme état dangereux celui lorsque les contraintes normales aux points extrêmes de la section de la poutre attei-

gnent la limite d'écoulement (fig. XIII.5, *a*). Alors, on obtient pour le moment fléchissant

$$M_{\acute{e}} = W_x \sigma_{\acute{e}}, \tag{XIII.10}$$

où W_x est le moment de résistance à la flexion. Par exemple, pour un rectangle

$$W_x = bh^2/6.$$

Pourtant, comme le montrent les expériences, cet état n'est pas un état limite. La charge peut encore être poussée par suite de l'expansion de l'écoulement aux fibres intérieures.

Le diagramme des contraintes à l'état limite est représenté sur la figure XIII.5, *b*.

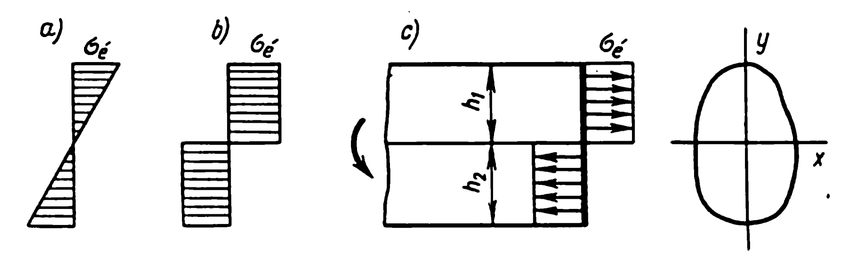


Fig. XIII.5

L'augmentation ultérieure de la charge est impossible (sans tenir compte de la consolidation du matériau). Dans la section dangereuse sollicitée par le moment fléchissant maximal, il se forme ce qu'on appelle une *articulation plastique,* dans cette section le moment fléchissant atteint la valeur limite M_u. Ce moment est déterminé à partir de la condition qu'en tous les points de la section droite dangereuse les contraintes normales valent (en module) la limite d'écoulement $\sigma_{\acute{e}}$.

Considérons d'abord le cas de la flexion simple. Déterminons la position de l'axe neutre de la section. En tenant compte que l'effort normal résultant des forces normales intérieures $\sigma_{\acute{e}} A$ est nul, nous obtenons

$$N = \int_A \sigma_{\acute{e}} dA = 0$$

ou

$$\sigma_{\acute{e}} \int_0^{h_1} b \, dy - \sigma_{\acute{e}} \int_0^{h_2} b \, dy = 0,$$

où b est la largeur (variable) de la poutre.

Les intégrales correspondent aux aires A_1 et A_2 des parties de la section tendue et comprimée. De la sorte,

$$\sigma_{\acute{e}}(A_1 - A_2) = 0, \tag{XIII.11}$$

d'où

$$A_1 = A_2. \qquad \text{(XIII.12)}$$

Par conséquent, *dans le cas de la flexion plastique l'axe neutre divise la section en deux parties égales.*

Composons maintenant l'expression du moment fléchissant limite en tant que résultant des forces normales intérieures $\sigma_ė dF$ (fig. XIII.5, *c*) :

$$M_u = \int_A \sigma_ė dA\, y$$

ou

$$M_u = \sigma_ė \int_{A_1} y\, dA + \sigma_ė \int_{A_2} y\, dA.$$

Les intégrales donnent les moments statiques S_{1x} et S_{2x} des parties supérieure et inférieure de l'aire de la section par rapport à l'axe neutre. Par conséquent,

$$M_u = \sigma_ė(S_{1x} + S_{2x}). \qquad \text{(XIII.13)}$$

Pour les sections dont l'axe de symétrie est perpendiculaire au plan des forces, $S_{1x} = S_{2x} = S_{0x}$, où S_{0x} est le moment statique de la demi-section par rapport à l'axe neutre. Alors, la formule (XIII.13) devient

$$M_u = \sigma_ė 2S_{0x} = \sigma_ė W_{x,\,pl}, \qquad \text{(XIII.14)}$$

où $W_{x,\,pl} = 2S_{0x}$ est ce qu'on appelle le moment plastique de résistance à la flexion. Par exemple, pour un rectangle

$$W_{x,\,pl} = b\frac{h}{2}\frac{h}{4}2 = \frac{bh^2}{4}. \qquad \text{(XIII.15)}$$

Par conséquent, pour une section rectangulaire

$$M_u/M_ė = W_{x,\,pl}/W_x = (bh^2/4):(bh^2/6) = 1{,}5,$$

c'est-à-dire compte tenu des déformations plastiques, le moment fléchissant limite devient 1,5 fois plus grand. Pour une section circulaire, le rapport des moments limites vaut 1,7 ; pour la section annulaire à rapport $d/D = 0{,}5$, il vaut 1,57, et pour la section en H, environ 1,15.

Comme le montre l'expérience, le mode envisagé est également applicable en tant que première approximation au cas général de la flexion lorsque les sections droites sont soumises aussi bien au moment fléchissant qu'à l'effort tranchant.

Dans le calcul des poutres hyperstatiques la prise en compte des déformations plastiques permet de rendre évidentes les réserves dissimulées encore plus importantes de l'augmentation du pouvoir portant du système.

Considérons, par exemple, le travail de la poutre hyperstatique représentée sur la figure VII.27. Le moment fléchissant sollicitant la section D étant maximal lorsque la contrainte suivant toute la section devient égale à la limite d'écoulement, c'est là que se forme surtout l'articulation plastique. Pourtant, sa formation dans la section n'épuise pas encore le pouvoir portant de la poutre. La charge peut encore croître tant qu'il ne se forme dans la section C la deuxième articulation plastique qui transforme la poutre en système géométriquement modifiable incapable de supporter la charge.

§ 110. Flexion plastique en présence de la consolidation du matériau

Pour résoudre ce problème, admettons que la relation entre σ et ε est la même que pour un matériau plastique rigide :

$$\sigma = \sigma_{t} + E_1\varepsilon, \qquad \text{(XIII.16)}$$

où E_1 est le module de consolidation égal à la tangente de l'angle d'inclinaison de la droite BC (fig. XIII.6). Convenons que pour la traction et la compression les modules de consolidation ont la même valeur.

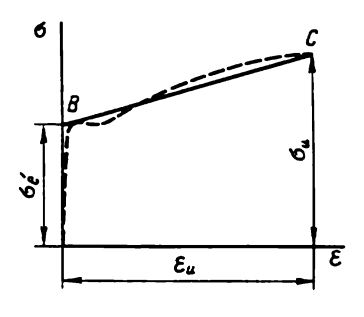


Fig. XIII.6

Le modèle du matériau plastique rigide traduit bien les diagrammes réels $\sigma - \varepsilon$ des matériaux plastiques.

En se bornant aux cas de faibles déformations élasto-plastiques, on peut adopter comme pour la flexion dans le domaine élastique a) l'hypothèse des sections planes ; b) l'hypothèse de l'état de contrainte uniaxial de la poutre.

La figure XIII.7 montre comment a changé le réseau porté à la surface latérale d'une poutre sous l'action de l'essai. Cette photographie montre que malgré les déformations plastiques, dont témoignent les lignes de Tchernov-Lüders, l'hypothèse des sections planes garde sa valeur (les lignes verticales restent droites).

L'hypothèse des sections planes permet de déduire la formule qui établit la loi linéaire de la distribution des déformations relatives suivant la hauteur de la poutre :

$$\varepsilon = y/\rho, \qquad \text{(XIII.17)}$$

où y est la distance entre l'axe neutre et la fibre envisagée ; ρ, le rayon de courbure de la poutre.

La deuxième hypothèse et la formule (XIII.16) amènent pour la zone tendue

$$\sigma = \sigma_t + E_1 y/\rho \; ; \qquad \text{(XIII.18)}$$

pour la zone comprimée

$$\sigma = -(\sigma_t + E_1 y/\rho). \qquad \text{(XIII.18a)}$$

Pour déterminer le rayon de courbure examinons les sections à axe de symétrie horizontal et composons l'équation d'équilibre d'une partie de la

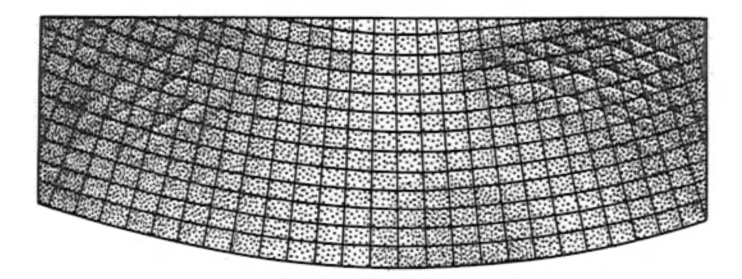


Fig. XIII.7

poutre. A cet effet, annulons la somme des moments par rapport à l'axe neutre

$$2 \int_{A/2} \sigma y \, \mathrm{d}A = M,$$

où M est le moment fléchissant dans la section.

En appliquant la formule (XIII.18), on obtient

$$2 \int_{A/2} (\sigma_t + E_1 y/\rho) y \, \mathrm{d}A = M \qquad \text{(XIII.19)}$$

ou

$$2 \int_{A/2} \sigma_t \, y \, \mathrm{d}A + \frac{2E_1}{\rho} \int_{A/2} y^2 \mathrm{d}A = M. \qquad \text{(XIII.20)}$$

Introduisons la notation

$$W_{x,\,\mathrm{pl}} = 2S_{0x} = 2 \int_{A/2} y \, \mathrm{d}A, \qquad \text{(XIII.21)}$$

$$I_x = 2 \int_{A/2} y^2 \mathrm{d}A = \int_A y^2 \mathrm{d}A, \qquad \text{(XIII.22)}$$

où $W_{x,\,\mathrm{pl}}$ est le moment plastique de résistance à la flexion ; I_x, le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre x.

Compte tenu des formules (XIII.21) et (XIII.22), la formule (XIII.20) entraîne

$$\sigma_{\text{é}} W_{x,\,\mathrm{pl}} + E_1 I_x/\rho = M, \qquad \text{(XIII.23)}$$

d'où

$$1/\rho = M/(E_1 I_x) - \sigma_{\text{é}} W_{x,\,\mathrm{pl}}/(E_1 I_x). \qquad \text{(XIII.24)}$$

En portant la valeur de $1/\rho$ de la formule (XIII.24) dans (XIII.18), il vient

$$\sigma = \sigma_{\text{é}} + My/I_x - \sigma_{\text{é}} W_{x,\,\mathrm{pl}} y/I_x. \qquad \text{(XIII.25)}$$

Les contraintes maximales dans les fibres extrêmes sont

$$\sigma = \pm(\sigma_{\text{é}} + M/W_x - \sigma_{\text{é}} W_{x,\,\mathrm{pl}}/W_x) \; ; \qquad \text{(XIII.26)}$$

pour $\sigma_{\text{é}} = 0$, on obtient la formule de la flexion linéaire connue.

Le moment limite (de rupture) s'obtient à partir de la formule (XIII.26) sous des contraintes égales à la charge de rupture

$$M_u = W_x(\sigma_u - \sigma_{\text{é}}) + \sigma_{\text{é}} W_{x,\,\mathrm{pl}} \; ; \qquad \text{(XIII.27)}$$

lorsque $\sigma_u = \sigma_{\text{é}}$ (plasticité parfaite), on aboutit à la formule (XIII.14) :

$$M_u = \sigma_{\text{é}} W_{x,\,\mathrm{pl}}.$$

Exemple XIII.1. Calculer la charge limite d'une poutre de section rectangulaire b = = 4,67 cm ; h = 10,07 cm, en acier doux à $\sigma_{\text{é}}$ = 212 MPa ; σ_u = 430 MPa ; ε_u = 0,24 (allongement relatif à la rupture) ; $W_x = 78{,}6 \text{ cm}^3 = 78{,}6 \cdot 10^{-6} \text{m}^3$; $W_{x,\,\mathrm{pl}} = 118{,}4 \text{ cm}^3 = = 118{,}4 \cdot 10^{-6} \text{m}^3$. Longueur de la poutre l = 0,7 m ; $E_1 = (\sigma_u - \sigma_{\text{é}})/\varepsilon_u = (430 - - 212)/0{,}24 = 910$ MPa.

Solution. Le moment de rupture se calcule d'après la formule (XIII.27) :

$$M_u = 78{,}6 \cdot 10^{-6}(430 - 212) + 212 \cdot 118{,}4 \cdot 10^{-6} = 422 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

La charge destructrice s'écrit :

$$F_u = 4M_u/l = 4 \cdot 422 \cdot 10^2/0{,}7 = 241 \cdot 10^3 \text{ N} = 241 \text{ kN}.$$

Dans les expériences, l'essai d'une telle poutre a été arrêté sous la charge de 282 kN par suite de déformations excessives.

Le dépassement de la charge destructrice réelle par rapport à celle de calcul s'explique par le fait que, dans la zone de consolidation, la convexité du diagramme réel σ—ε est orientée en haut et passe au-dessus de la droite de calcul BC (cf. le pointillé de la figure XIII.6).

Si l'on calcule le moment limite sans prendre en compte la consolidation, on obtient

$$M_u = \sigma_é W_{x,\,pl} = 212\cdot 118{,}4\cdot 10^{-6} = 252\cdot 10^2\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

La charge destructrice obtenue serait alors

$$F_u = 4\cdot 252\cdot 10^2/0{,}7 = 144\cdot 10^3\ \text{N} = 144\ \text{kN},$$

ce qui est de 40 % moins que F_u calculée compte tenu de la consolidation.

On voit donc que la consolidation influe sensiblement sur la valeur de la charge de rupture.

§ 111. Généralités sur le calcul d'après les états limites

La méthode de calcul des pièces décrite dans les chapitres précédents s'appelle calcul d'après les *contraintes admissibles*. Dans cette méthode le calcul des pièces à la résistance et à la rigidité est mené en observant la loi de Hooke. On y considère que *l'état dangereux de la pièce est tel que la contrainte atteigne ne serait-ce qu'en un point (point dangereux) la limite d'écoulement*.

On admet que la résistance de la pièce est assurée et la contrainte de service (active) au point dangereux ne dépasse pas la contrainte admissible

$$\sigma \leqslant \sigma_{adm} = \sigma_é/n_{adm}, \qquad \text{(XIII.28)}$$

où n_{adm} est le coefficient de sécurité normalisé.

Le coefficient de sécurité réel est déterminé comme le rapport entre la limite d'écoulement et la contrainte réelle :

$$n = \sigma_é/\sigma. \qquad \text{(XIII.29)}$$

Pourtant, comme nous l'avons dit précédemment, en appliquant la loi de Hooke, on ne peut pas calculer les charges limites que la pièce est capable de supporter à l'instant de la rupture ou à l'instant de la formation d'une déformation plastique déterminée.

Dans de nombreux cas, il est plus correct de mener les calculs à la résistance sous l'action des charges statiques compte tenu des déformations plastiques, comme nous l'avons décrit dans ce chapitre, et calculer le coefficient de sécurité comme le rapport de la charge limite F_u à la charge de service F :

$$n = F_u/F. \qquad \text{(XIII.29a)}$$

Dans les calculs des pièces, il est également plus correct d'utiliser non pas un seul coefficient de sécurité, mais tout un système de coefficients particuliers susceptibles de rendre compte de l'influence des facteurs principaux sur la résistance de la pièce. Ceci permet d'évaluer d'une façon plus différenciée les conditions concrètes très variées du service de la pièce.

Ceci fait que ces derniers temps la *méthode de calcul des pièces d'après les états limites* est appliquée de plus en plus souvent; dans des cas définis, elle permet de prendre en compte les déformations plastiques.

De nos jours, en U.R.S.S. il est de rigueur de mener le calcul des structures des constructions d'après les états limites. En construction mécanique où les conditions de service sont très variées, la réglementation des méthodes de calcul n'est pas aussi rigoureuse. Actuellement la méthode la plus usitée dans ce domaine est encore le calcul d'après les états élastiques (d'après les contraintes admissibles). Toutefois, là aussi on commence à appliquer la méthode des états limites.

Comme états limites d'une pièce de machine on peut adopter :

1. L'état limite par rapport au pouvoir portant, déterminé par les charges qui correspondent aux états limites de la résistance, de la stabilité, de l'endurance, des déformations plastiques. Ces charges peuvent être constituées par les forces F, les moments M, les pressions q, etc.

2. L'état limite par rapport aux déformations et déplacements, dont la valeur, atteinte par une pièce qui conserve la résistance et la stabilité, rend impossible pour cette pièce son service ultérieur.

3. L'état limite par rapport à l'usure superficielle de la pièce.

Chacun de ces états limites est défini par la condition qui indique que pour assurer la sécurité en service les forces appliquées doivent être inférieures à la valeur limite, et à l'état limite, égales à cette valeur.

Pour le premier état limite c'est la *condition* dite *d'indestructibilité,* qui est de la forme

$$N \leqslant N_u, \tag{XIII.30}$$

où N est l'effort de calcul supporté par la pièce ; N_u, la résistance limite de la pièce relative à l'instant de la perte du pouvoir portant.

L'effort de calcul de la pièce est déterminé comme la somme des efforts résultant de chaque charge normalisée, compte tenu des coefficients de surcharge n_1 supérieurs à l'unité associés à chaque charge. Ainsi,

$$N = \sum N_n n_1. \tag{XIII.31}$$

La résistance limite N_u dépend de la forme et des dimensions de la pièce, de la résistance du matériau à la forme correspondante de la déformation et des conditions de service, c'est-à-dire

$$N_u = n_2 n_3 \sigma_n A, \tag{XIII.32}$$

où n_2 est le coefficient d'homogénéité du matériau ; n_3, le coefficient de service qui rend compte de la responsabilité de la pièce et d'autres particularités non traduites directement par le calcul ; σ_n, la résistance normalisée du matériau (pour les matériaux plastiques, la valeur normalisée de la limite d'écoulement ; pour les matériaux fragiles, la valeur normalisée de la charge de rupture ; dans le calcul à la fatigue, la limite d'endurance) ; A, le facteur géométrique de la pièce (aire, couple de réaction, etc.).

Dans le calcul à la fatigue, la résistance limite doit inclure les coefficients correspondants réduisant le pouvoir portant de la pièce (coefficient de concentration, facteur d'échelle, etc.).

Ainsi, sous la forme développée, la condition d'indestructibilité s'écrit

$$\sum N_n n_1 = N \leqslant n_3 n_2 \sigma_n A. \qquad \text{(XIII.33)}$$

Pour le deuxième état limite, la condition limite est de la forme

$$\Delta \leqslant \Delta_u, \qquad \text{(XIII.34)}$$

où Δ est le déplacement maximal de la section de la pièce sous l'action de la charge de service ; Δ_u, le déplacement limite imposant l'arrêt du travail de la pièce (fonction de la destination de la pièce).

Pour une application plus large de la méthode de calcul d'après les états limites en construction mécanique, il faut réaliser une normalisation plus détaillée des coefficients de surcharge, d'homogénéité, de conditions de service, de déformation plastique limite, de l'usure limite, etc.

Ceci permettra en choisissant les dimensions de la pièce de s'appuyer non seulement sur l'expérience et l'art de l'agent d'étude, mais aussi sur les critères objectifs et les normes, ce qui accroîtra la fiabilité des pièces et permettra de diminuer le débit des matériaux dans leur fabrication.

§ 112. Tendances modernes dans le développement des méthodes de calcul des constructions

Les méthodes de calcul des constructions ne cessent de se développer en devenant plus exactes et plus parfaites.

Ces dernières années, on étudie intensément les problèmes de la dynamique des constructions, les méthodes de leur calcul, compte tenu des propriétés plastiques du matériau, les méthodes de calcul à la stabilité, les questions d'applicabilité des ordinateurs, les méthodes de conception des constructions à poids minimal, etc.

Une attention particulière impose la méthode nouvelle en principe du calcul des constructions appliquée ces dernières années surtout en Union Soviétique (ouvrages de N. Stréletski, A. Rjanitsyne, V. Bolotine, etc.). On peut l'appeler par convention *méthode probabiliste-statistique* ou simplement *statistique*.

D'après son idée maîtresse, les quantités qui figurent dans les équations de la résistance, de la rigidité et de la stabilité, telles les charges, les caractéristiques des propriétés du matériau, les caractéristiques géométriques des sections, sont envisagées non pas comme des constantes strictement défi-

nies, mais comme des grandeurs aléatoires (ensembles statistiques) présentant une variabilité (diffusion) connue, parfois très importante. L'étude de ces variations n'est possible que sur la base de la théorie des probabilités.

Le degré de diffusion de telle ou telle quantité est défini par la courbe de distribution correspondante.

La figure I.6 représente à titre d'exemple la courbe de distribution de la charge, et la figure II.12, la courbe de distribution de la limite d'écoulement de l'acier à bas carbone.

Même des grandeurs aussi constantes que l'aire de la section, le couple de réaction, le moment d'inertie et simplement les dimensions linéaires de la pièce, sont en fait des grandeurs statiquement variables par suite des erreurs inévitables de leurs fabrication et mesures.

Les courbes de distribution peuvent se construire d'après les données expérimentales ou, dans certains cas, d'une façon purement spéculative suivant les lois théoriques qui correspondent aux indices importants de l'ensemble statistique donné. Il existe des indices (de Pearson, Kolmogorov, Bernstein) qui permettent d'établir que la courbe théorique correspond assez bien à la courbe empirique.

Les courbes de distribution peuvent être symétriques (cf. fig. II.22) et asymétriques (cf. fig. I.6). La courbe théorique la plus usitée décrivant la distribution symétrique est la courbe en cloche ou la courbe de Gauss, qui porte également le nom de la *loi normale* (cf. fig. II.22).

La courbe de Gauss peut également s'employer pour les lois de distribution asymétrique en y apportant telle ou telle « correction ». L'observation de la loi de Gauss pour décrire les phéhomènes asymétriques est désirable du fait que les opérations mathématiques où elle est appliquée sont les plus simples, bien étudiées et tabulées.

En connaissant les courbes de distribution des grandeurs initiales il est possible d'après les règles de la théorie des probabilités de tracer les courbes de distribution des fonctions.

Ainsi, en disposant de la courbe de distribution de la charge et de l'aire de la section, on peut construire la courbe de distribution de la contrainte normale pour la traction centrale $\sigma = F/A$.

Si les courbes de distribution de F et de A ont une forme normale, la courbe de distribution de σ sera aussi normale. Puis on écrit la condition de la résistance qui, traduite par les contraintes, est de la forme

$$\sigma < \sigma_u, \qquad \text{(XIII.35)}$$

où σ est la contrainte de calcul ; σ_u, la contrainte limite (pour les matériaux plastiques, la limite d'écoulement $\sigma_{\acute{e}}$).

Lorsqu'on tient compte des déformations plastiques, les contraintes sont remplacées par les efforts

$$N < N_u. \qquad \text{(XIII.36)}$$

La question du degré de diminution de la contrainte de calcul par rapport à la contrainte limite est résolue par la méthode existante des contraintes admissibles en introduisant du coefficient de sécurité n.

La méthode statistique reconnaît que la diminution de n fois des grandeurs figurant dans les deuxièmes membres des expressions (XIII.35) et (XIII.36) n'assure pas à 100 % l'indestructibilité de la pièce, les courbes de distribution ne coupant pas l'axe horizontal. C'est pourquoi, même lorsque le coefficient de sécurité est notable, la probabilité de la rupture d'une pièce demeure toujours.

Le problème consiste à savoir déterminer cette probabilité et à adopter en fonction de la destination de la pièce comme valeur admissible telle ou telle valeur. A cet effet, il faut construire la courbe de distribution de la fonction de résistance $D = N_u - N$ (ou $\sigma_u - \sigma$). Dans le cas de la forme normale des fonctions de distribution de σ_u et de σ, la courbe de D sera également normale (fig. XIII.8).

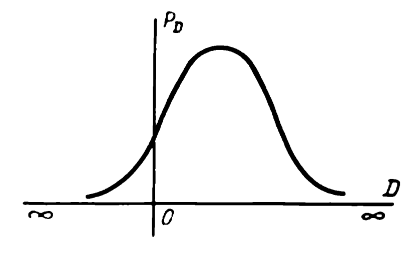


Fig. XIII.8

En ordonnées on porte les valeurs de la densité de probabilité de la distribution de la fonction D ; en abscisses, les valeurs de la fonction D elle-même. L'aire sous la courbe est égale à l'unité. Les valeurs positives de la fonction D correspondent aux cas des sollicitations assurant la sécurité, les valeurs négatives, aux cas de la rupture de la pièce ou des déformations inadmissibles.

La probabilité Q de la destruction de la pièce est définie par l'aire sous la courbe de distribution de la fonction dans les limites de moins l'infini à zéro

$$Q = \int_{-\infty}^{0} P_D dD. \qquad \text{(XIII.37)}$$

Au lieu de la probabilité de la destruction Q, on peut opérer avec la probabilité de l'indestruction P (*fiabilité*), caractérisée par l'aire sous la partie positive de la courbe

$$P = \int_{0}^{\infty} P_D dD = 1 - Q. \qquad \text{(XIII.38)}$$

Pour l'intégrale (XIII.37) on peut recourir aux tableaux. La probabilité calculée de la destruction de la construction ne doit pas dépasser une petite grandeur appelée ***probabilité admissible de la destruction de la construction.***

La probabilité admissible de destruction de la pièce doit être choisie en fonction des conséquences éventuelles, susceptibles d'être provoquées par la rupture de la pièce. Si sa rupture peut causer des victimes humaines, la probabilité retenue de cette rupture doit être très petite, pratiquement nulle.

Les recherches du professeur N. Stréletski ont montré que pour la réalisation des constructions la probabilité de la rupture varie de $1 \cdot 10^{-5}$ à $1 \cdot 10^{-7}$, c'est-à-dire un million de constructions comporte en moyenne une qui peut rompre à n'importe quel moment.

L'un des projets des normes de calcul des ouvrages particulièrement responsables (1958) recommandait de retenir si leur mise hors service était catastrophique, une probabilité de destruction admissible égale à $3 \cdot 10^{-6}$, c'est-à-dire admettait qu'un million d'ouvrages pouvait comporter trois qui peuvent subir une destruction éventuelle.

Si la destruction de la pièce (de l'ouvrage) n'entraîne pas de victimes humaines, mais impose seulement une réparation ou un remplacement de cette pièce, la probabilité de destruction admissible peut être établie d'après des considérations purement économiques, et notamment, d'après la condition du prix minimal de la pièce (prix de fabrication et prix de réparation).

L'application pratique de la méthode statistique doit être précédée d'un travail de recherche vaste portant sur l'étude des courbes de distribution des charges, des caractéristiques de la résistance du matériau et d'autres grandeurs qui interviennent dans la résistance de la construction.

Ces dernières années apparaissent de nouveaux matériaux autrefois inconnus et qui possèdent parfois des propriétés inédites.

La création de nouveaux matériaux, et, en particulier, des matériaux composés, n'est pas seulement l'œuvre des spécialistes dans ce domaine, mais aussi de ceux qui étudient la résistance, parce que ce n'est qu'en collaboration avec ces derniers qu'il est possible de concevoir les matériaux composés les plus efficaces. Il devient alors possible de créer des matériaux aux propriétés données à l'avance et assurant le service optimal de telle ou telle pièce, compte tenu des conditions fonctionnelles, de l'allure des charges et des sollicitations thermiques. Ces problèmes de la résistance ont été rendus particulièrement compliqués par l'utilisation de l'énergie atomique et l'assimilation de l'espace cosmique. Ce sont les cas où se présente la nécessité de résoudre des problèmes posés par la résistance des éléments des machines et des appareils travaillant dans des conditions extrémales.

Aux conditions extrémales qui altèrent sensiblement la résistance du matériau se rapportent les températures élevées atteignant 3000 ou

4000 °C, ainsi que les températures basses frisant le zéro absolu, la radioactivité intense, les gaz portés à de hautes températures et contenant des additions chimiques actives, les fusions des métaux et l'eau de mer, ainsi que l'intervention simultanée des facteurs mentionnés.

Il faut considérer également que les conditions sont extrémales lorsque le service s'accompagne des régimes instables des sollicitations et de la température, y compris des charges impulsionnelles périodiques ou aléatoires et des successsions brusques de température, c'est-à-dire des conditions caractéristiques du fonctionnement réel de nombreuses installations énergétiques, des appareils de vol, des turbines, des corps des vaisseaux sub- et sous-marins, des installations chimiques, des conduites, des moteurs à combustion interne, du matériel roulant des chemins de fer et du transport automobile, etc.

Nombreux de ces objets sont le siège de la combinaison complexe des facteurs les plus divers qui exercent une action défavorable sur la résistance et la fiabilité des éléments les plus responsables. Ceci pose aux spécialistes dans le domaine de la résistance des problèmes urgents dont la solution est rendue impérative par le progrès technique.

Avant tout l'attention doit être portée sur l'accumulation des données empiriques sur les propriétés physiques et mécaniques de divers matériaux dans les conditions proches au maximum de celles du service et extrémales pour les matériaux considérés.

La nécessité d'étudier les conditions expérimentales de ce genre est conditionnée par le fait que l'action déconsolidante des facteurs mentionnés qui interviennent dans le service ne se prête pas à l'évaluation par voie théorique. Il convient de noter que l'exploration des propriétés de résistance et de déformation d'un matériau impose l'étude des possibilités éventuelles de son utilisation optimale dans tels ou tels éléments des constructions.

Dans d'autres cas, il faut rendre évidentes celles des modifications complémentaires de nature technologique et conceptive, qui améliorent sensiblement les propriétés physiques et mécaniques les plus importantes du matériau, et par suite, sa résistance et sa fiabilité en service dans telles ou telles conditions.

En concrétisant ce qui vient d'être dit, voici les problèmes qui doivent être résolus le plus vite possible dans le domaine de la résistance.

1. Etude de la résistance aux températures élevées des matériaux réfractaires et difficilement fusibles à l'état de contrainte simple et composé, aussi bien pour des charges statiques de courte et de grande durée, que pour des charges alternatives et des variations brusques de la température.

2. Etude des caractéristiques mécaniques principales de la résistance et de la plasticité des matériaux aux températures basses et élevées sous des charges statiques, alternatives et impulsionnelles, compte tenu des facteurs techniques de conception et de technologie.

3. Etude de l'influence de l'irradiation dans les piles atomiques sur la

résistance de courte et de grande durée et sur la plasticité, ainsi que sur les autres propriétés mécaniques des matériaux de construction, pour de différentes formes d'action des forces et de la température, dans le but d'évaluer l'effet produit par le rayonnement.

4. Etude de l'action exercée par les milieux agressifs (produits de combustion, eau de mer, etc.) sur les propriétés mécaniques des matériaux sous de différentes formes de sollicitation et sous des températures différentes, dans le but de mettre en évidence l'effet de la déconsolidation.

5. Exploration des caractéristiques de la résistance des matériaux composés.

6. Exploration de la résistance des matériaux fragiles du type verre et métal dans le but de créer des constructions techniques rationnelles, où dans la pleine mesure seraient réalisées les propriétés caractéristiques avantageuses (faible poids spécifique, résistance élevée à la compression).

7. Développement ultérieur de la mécanique de destruction, et en premier lieu de la théorie des fissures, et établissement des critères des états limites des constructions, ainsi que la prévision de leur longévité.

8. Questions de fatigue, et en premier lieu de la fatigue provoquée par des sollicitations cycliques peu nombreuses.

9. Etude des aspects physiques de la résistance des matériaux et des éléments de constructions en recourant largement à la microscopie électronique, la défectoscopie ultrasonore, etc.

10. Recherches des méthodes d'évaluation de l'accumulation de la défectivité du matériau et établissement de la dynamique de ses variations en service des éléments des constructions responsables soumis à des contraintes élevées.

ANNEXES

Aciers laminés conformes à GOST 8239-72, 8240-72, 8509-72* (N CAEM 104-74); 8510-72 (N CAEM 255-76)

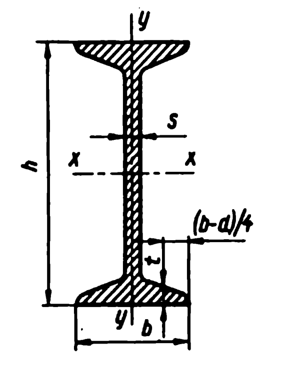


Tableau 1

Poutres en H

n° de la poutre	Dimensions, mm				Aire de la section, cm^2	Masse de 1 m, kg	Grandeurs de référence des axes						
							x—x				y—y		
	h	b	s	t			I_x, cm^4	W_x, cm^3	i_x, cm	S_x, cm^3	I_y, cm^4	W_y, cm^3	i_y, cm
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1 290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1 430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12

20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1 840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2 030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2 550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2 790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3 460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3 800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5 010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5 500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7 080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7 780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9 840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13 380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19 062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27 696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39 727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55 962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00	76 806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Tableau 2

Poutres en U

nº des profi-lés	Masse de 1 m, kg	Dimensions, mm				Aire de la section, cm^2	Grandeurs de référence des axes							z_0, cm
							x—x				y—y			
		h	b	s	t		I_x, cm^4	W_x, cm^3	i_x, cm	S_x, cm^4	I_y, cm^4	W_y, cm^3	i_y, cm	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80

16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2 330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10 200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Tableau 3

Cornières isocèles

n° des profilés	Dimensions, mm,		Aire du profilé, cm^2	Masse de 1 m, kg	Grandeurs de référence des axes							z_0, cm
					$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	
	b	d			I_x, cm^4	i_x, cm	I_{x_0} max, cm^4	i_{x_0} max, cm	I_{y_0} min, cm^4	i_{y_0} min, cm	I_{x_1}, cm^4	
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94

3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
		5	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18

Suite

n° des profilés	Dimensions, mm,		Aire du profilé, cm^2	Masse de 1 m, kg	Grandeurs de référence des axes							z_0, cm
					x—x		$x_0—x_0$		$y_0—y_0$		$x_1—x_1$	
	b	d			I_x, cm^4	i_x, cm	I_{x_0} max, cm^4	i_{x_0} max, cm	I_{y_0} min, cm^4	i_{y_0} min, cm	I_{x_1}, cm^4	
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1 051	3,68

		9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
14	140	10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1 097	3,90
		10	31,4	24,7	774	4,96	1 229	6,25	319	3,19	1 356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1 341	6,24	348	3,18	1 494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1 450	6,23	376	3,17	1 633	4,39
16	160	14	43,3	34,0	1046	4,92	1 662	6,20	431	3,16	1 911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1 866	6,17	485	3,14	2 191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2 061	6,13	537	3,13	2 472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2 248	6,10	589	3,12	2 756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	2 128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	2 324	4,89
		12	47,1	37,0	1823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	3 182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	3 452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	3 722	5,46
20	200	16	62,0	48,7	2363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	4 264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4 560	7,72	1182	3,93	5 355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5 494	7,63	1438	3,91	6 733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6 351	7,55	1688	3,89	8 130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4 470	8,60	1159	4,38	4 941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5 045	8,58	1306	4,36	5 661	6,02
		16	78,4	61,5	4717	7,76	7 492	9,78	1942	4,98	8 286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8 337	9,75	2158	4,96	9 342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9 160	9,72	2370	4,94	10 401	6,91
25	250	22	106,1	83,3	6270	7,69	9 961	9,69	2579	4,93	11 464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11 125	9,64	2887	4,91	13 064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12 244	9,59	3190	4,89	14 674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12 965	9,56	3389	4,89	15 753	7,31

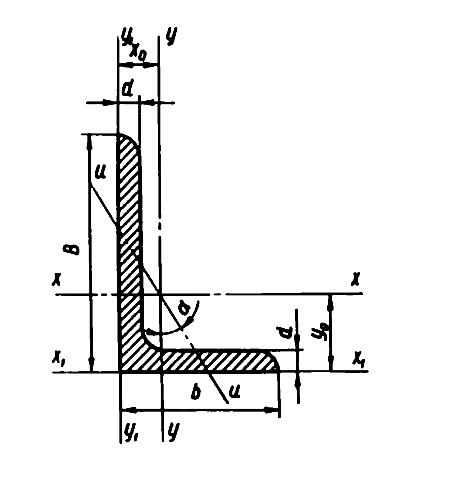


Tableau 4

Cornières non isocèles

n° des profilés	Dimensions, mm, B	b	d	Aire du profilé, cm²	Masse de 1 m, kg	I_x, cm⁴	i_x, cm	I_y, cm⁴	i_y, cm	I_{x_1}, cm⁴	Distance du centre de gravité y_0, cm	I_{y_1} min, cm⁴	Distance du centre de gravité x_0, cm	I_u min, cm⁴	i_u min, cm	Angle d'inclinaison, tg α
						Grandeurs de référence des axes: x—x		y—y		x_1—x_1		y_1—y_1		u—u		
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374

4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4	2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
			4	3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5	4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	2,0	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380

Suite

n° des profilés	Dimensions, mm,			Aire du profilé, cm^2	Masse de 1 m, kg	Grandeurs de référence des axes										Angle d'inclinaison, tg α
						$x—x$		$y—y$		$x_1—x_1$		$y_1—y_1$		$u—u$		
	B	b	d			I_x, cm^4	i_x, cm	I_y, cm^4	i_y, cm	I_{x_1}, cm^4	Distance du centre de gravité y_0, cm	I_{y_1} min, cm^4	Distance du centre de gravité x_0, cm	I_u min, cm^4	i_u min, cm	
			6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
10/6,3	100	63	7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
			7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
12,5/8	125	80	8	16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,7	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
			9	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
16/10	160	100	10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12	30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385

18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1 933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,10	2 324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2 920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3 189	6,54	786	2,83	286	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3 726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4 264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6 212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8 308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9 358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

INDEX

TABLE DES MATIÈRES